This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

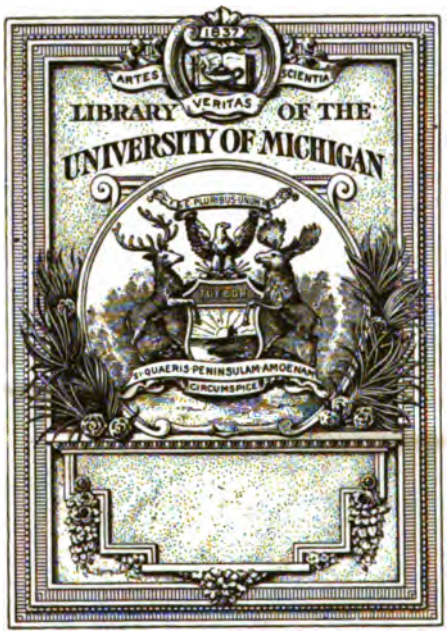
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

STORAGE
B 450737 DUPL



THE GIFT OF
Prof. A. Hunt

QA
811
.S32

Contents.

- Ueber bewegung materieller punkte.

- Mechanische und mathematische probleme.

577

Alexander Zürek 1.1

Jahresbericht

über die

Königliche Realschule zu Berlin,

womit

zu den öffentlichen Prüfungen,

welche

am 2ten und 3ten April

im neuen Hörsaale der vereinigten Anstalten

gehalten werden sollen,

ehrerbietigst einladet

der

Director Ranke.

Voran geht eine mathematische Abhandlung des Lehrers Dr. E. Schellbach.

Berlin, 1849.

Druck von A. W. Hayn.

[illegible]

Gift of
Prof. A. Ziwet
Sept, 13 19(

Ueber Bewegung materieller Punkte.

I.

Ein materieller Punkt werde von einem zweiten festen Punkte mit einer Kraft angezogen, die in demselben Verhältnisse abnimmt, wie der Kubus der Entfernung zunimmt; man soll seine Bewegung bestimmen, wenn vorausgesetzt wird, daß dieselbe nur in der geraden Linie stattfindet, welche beide Punkte verbindet.

Man nehme die gerade Linie, in welcher der bewegliche Punkt von dem festen angezogen wird, als Abscissenaxe an und nenne seine Abscisse x. In den festen Punkt, dessen Masse wir mit m bezeichnen wollen, legen wir den Anfang O der Coordinaten.

$$X_1 \xleftarrow[x]{O} X$$

Es sei nun der Zuwachs an Geschwindigkeit, welchen die Masse M einem Punkte ertheilt, wenn sie in der Entfernung r eine Secunde lang auf ihn einwirkt, gleich g, dann ist die Anziehung in der Entfernung 1 gleich gr^2, und die, welche die Masse 1 auf denselben Punkt ausübt, ist dann gleich $\frac{gr^2}{M}$. Folglich ist die Anziehung, welche die Masse m auf einen Punkt in der Entfernung 1 ausübt gleich $\frac{mgr^2}{M} = mk$, wenn wir $\frac{gr^2}{M} = k$ setzen. Hiernach ist die Anziehung, welche der Punkt x von dem Punkte O erfährt:

$$-\frac{mk}{x^2}.$$

Es ergiebt sich daher, wenn wir $k=1$ setzen, für die Bewegung des Punktes x folgende Gleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m}{x^2} \qquad 1.$$

und wenn man dieselbe mit $2dx$ multiplicirt und dann integrirt:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{m}{x^2} + c. \qquad 2.$$

Um die Constante c zu bestimmen, nehmen wir an, daß zur Zeit $t = o$ die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes α und die Anfangsposition a sei, dann wird:

3. $$c = \alpha^2 - \frac{m}{a^2}.$$

Aus der Gleichung 2. erhält man:

4. $$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{m}{x^2} + c} = \pm\frac{\sqrt{m + cx^2}}{x}.$$

Da nun aber für die Bewegung des Punktes von X nach O hin dx negativ ist, während dt immer positiv sein muß, so kann, weil für diesen Fall x positiv ist, nur das untere Zeichen der Wurzel in Gleichung 4. gelten, und man hat für diesen Fall:

5. $$t = -\int\frac{x\,dx}{\sqrt{m + cx^2}} = -\frac{1}{c}\sqrt{m + cx^2} + c_1.$$

Es war aber $x = a$ für $t = o$, mithin wird:

6. $$c_1 = \frac{1}{c}\sqrt{m + ca^2}.$$

Folglich ist:

I. $$t = \frac{1}{c}\sqrt{m + ca^2} - \frac{1}{c}\sqrt{m + cx^2}.$$

Will man die Zeit wissen, wann der Punkt in O ankommt, so hat man in dieser letzten Gleichung $x = o$ zu setzen, und man erhält:

7. $$t = \frac{1}{c}\sqrt{m + ca^2} - \frac{1}{c}\sqrt{m}.$$

Aus der Gleichung 4. ersieht man, daß der bewegliche Punkt in O eine unendlich große Geschwindigkeit erlangt hat, er wird sich also von jetzt an von O nach X_1 hinbewegen. Für diesen Theil der Bewegung ist aber x negativ, während dx auch noch negativ bleibt, man muß daher jetzt in der Gleichung 4. das obere Zeichen der Wurzel gelten lassen, und dann ergiebt sich:

8. $$t = \int\frac{x\,dx}{\sqrt{m + cx^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{m + cx^2} + c_2.$$

Für $x = o$ war aber $t = \frac{1}{c}\sqrt{m + ca^2} - \frac{1}{c}\sqrt{m}$, mithin wird:

9. $$c_2 = \frac{1}{c}\sqrt{m + ca^2} - \frac{2}{c}\sqrt{m}$$

folglich:

II. $$t = \frac{1}{c}\sqrt{m + cx^2} + \frac{1}{c}\sqrt{m + ca^2} - \frac{2}{c}\sqrt{m}.$$

Für die Bewegung des Punktes von X nach O gilt also die Gleichung I., während für die Bewegung von O nach X_1 die Gleichung II. genommen werden muß.

Aus der Gleichung 4. ergiebt sich, daß die Geschwindigkeit des gegebenen Punktes Null wird, wenn:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{m}{c}} \qquad 10.$$

ist, was jedoch nie stattfinden kann, wenn c positiv ist, da m nicht negativ sein kann. Es ist aber c positiv, wenn $\alpha^2 > \frac{m}{a^2}$ ist, und in diesem Falle würde also der materielle Punkt nie wieder zu dem Punkte O zurückkehren, sondern sich immer mehr von demselben entfernen. Die Gleichungen I. und II. würden also vollständig die Bewegung des Punktes bestimmen. Nehmen wir an, daß der Punkt gar keine Anfangsgeschwindigkeit erhalten habe, so ist: $c = -\frac{m}{a^2}$, also wird aus 10. $x = \pm a$, d. h. der Punkt würde sich beständig zwischen $+a$ und $-a$ hin und her bewegen. Ist dagegen $\alpha^2 < \frac{m}{a^2}$, so wird c negativ und die Geschwindigkeit des Punktes würde zuerst wieder Null werden, wenn $x = -\sqrt{-\frac{m}{c}}$ ist. Die Zeit, in welcher dieses stattfindet, bestimmt sich aus der Gleichung II.:

$$t = \frac{1}{c}\sqrt{m+ca^2} - \frac{2}{c}\sqrt{m}. \qquad 11.$$

Nach dieser Zeit wird sich der Körper wieder von X_1 nach O bewegen, und man hat für diesen Theil der Bewegung in der Gleichung 4., da jetzt dx positiv, aber x negativ ist, das untere Zeichen der Wurzel zu nehmen, so daß man erhält:

$$t = -\int \frac{x\,dx}{\sqrt{m+cx^2}} = -\frac{1}{c}\sqrt{m+cx^2} + c_3. \qquad 12.$$

Die Zeit, in welcher die Geschwindigkeit des Körpers Null war, was für $x = -\sqrt{-\frac{m}{c}}$ stattfand, ist durch die Gleichung 11. bestimmt, man hat daher:

$$c_3 = \frac{1}{c}\sqrt{m+ca^2} - \frac{2}{c}\sqrt{m} \qquad 13.$$

also gilt für die Bewegung des Punktes von X_1 nach O folgende Gleichung:

$$t = \frac{1}{c}\sqrt{m+ca^2} - \frac{2}{c}\sqrt{m} - \frac{1}{c}\sqrt{m+cx^2}. \qquad III.$$

Hieraus findet man für die Zeit, in welcher der Körper jetzt wieder in O ankommt, die Gleichung:

$$t = \frac{1}{c}\sqrt{m+ca^2} - \frac{3}{c}\sqrt{m}. \qquad 14.$$

Bewegt sich der Körper nun von O nach X, so muß man in der Gleichung 4. das obere Zeichen der Wurzel gelten lassen, da jetzt dx und x positiv sind. Man erhält dann:

$$t = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{m+cx^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{m+cx^2} + c_4. \qquad 15.$$

Mit Rücksicht auf 14. ist:

16. $$c_4 = \frac{1}{c}\sqrt{m+ca^2} - \frac{4}{c}\sqrt{m}$$

so daß man für die Bewegung des Punktes von O nach X die Gleichung

IV. $$t = \frac{1}{c}\sqrt{m+cx^2} + \frac{1}{c}\sqrt{m+ca^2} - \frac{4}{c}\sqrt{m}$$

erhält. Die Geschwindigkeit des Punktes wird nun wieder Null, wenn $x = +\sqrt{-\frac{m}{c}}$ ist, was zur Zeit:

17. $$t = \frac{1}{c}\sqrt{m+ca^2} - \frac{4}{c}\sqrt{m}$$

stattfindet. Von jetzt an bewegt sich der Punkt abermals von X nach O, und für diesen Theil der Bewegung hat man:

V. $$t = \frac{1}{c}\sqrt{m+ca^2} - \frac{4}{c}\sqrt{m} - \frac{1}{c}\sqrt{m+cx^2}.$$

Zur bessern Uebersicht wollen wir die Gleichungen der Bewegung für den Fall, daß $a^2 < \frac{m}{a^2}$, noch einmal zusammenstellen. Es ergiebt sich also für die anfängliche Bewegung des Punktes

von: X nach O ; $t = \frac{1}{c}\sqrt{m+ca^2} - \frac{1}{c}\sqrt{m+cx^2}$

O „ X_1 ; $t = \frac{1}{c}\sqrt{m+ca^2} - \frac{2}{c}\sqrt{m} + \frac{1}{c}\sqrt{m+cx^2}$

X_1 „ O ; $t = \frac{1}{c}\sqrt{m+ca^2} - \frac{2}{c}\sqrt{m} - \frac{1}{c}\sqrt{m+cx^2}$

O „ X ; $t = \frac{1}{c}\sqrt{m+ca^2} - \frac{4}{c}\sqrt{m} + \frac{1}{c}\sqrt{m+cx^2}$

X „ O ; $t = \frac{1}{c}\sqrt{m+ca^2} - \frac{4}{c}\sqrt{m} - \frac{1}{c}\sqrt{m+cx^2}$

O „ X_1 ; $t = \frac{1}{c}\sqrt{m+ca^2} - \frac{6}{c}\sqrt{m} + \frac{1}{c}\sqrt{m+cx^2}$

u. s. w. . . . . .

Das Merkwürdige bei dieser Bewegung des materiellen Punktes ist die Bestimmung der Constanten. Es giebt also die zuerst gefundene Gleichung $t = \frac{1}{c}\sqrt{m+ca^2} - \frac{1}{c}\sqrt{m+cx^2}$ nicht den ganzen Verlauf der Bewegung an, sondern um diesen zu erkennen, hat man für jeden Theil der Bewegung, von X nach O und von O nach X_1 und wieder zurück, die Constante besonders zu bestimmen. Ganz ähnliche Rücksichten bei der Bestimmung der Constanten müssen genommen werden, wenn der bewegliche Punkt dem Newtonschen Gesetze folgt, denn man hat dann:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m}{x^2}$$

und

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2m}{x} + c.$$

Der Einfachheit wegen wollen wir die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null setzen und a die Anfangsposition des Punktes nennen, so geht die vorhergehende Gleichung über in:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2m\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right).$$

Hieraus ist:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2m\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)}.$$

Das untere Zeichen der Wurzel gilt bei der Bewegung von X bis O, das obere bei der Bewegung von O bis X. Für den ersten Theil der Bewegung hat man daher:

$$t = -\frac{1}{\sqrt{2m}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}} = \sqrt{\frac{a^3}{8m}}\left\{\frac{2}{a}\sqrt{ax - x^2} - \arccos\left(1 - \frac{2x}{a}\right)\right\} + \text{const}$$

Es war $x = a$ zur Zeit $t = o$, daher wird $\text{const} = \pi\sqrt{\frac{a^3}{8m}}$, mithin:

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{8m}}\left\{\pi + \frac{2}{a}\sqrt{ax - x^2} - \arccos\left(1 - \frac{2x}{a}\right)\right\} = \sqrt{\frac{a^3}{8m}}\{\pi - f(x)\}$$

wenn man $\arccos\left(1 - \frac{2x}{a}\right) - \frac{2}{a}\sqrt{ax - x^2} = fx$ setzt.

Aus dieser Gleichung sieht man, daß der angezogene Punkt nicht über O hinaus kann, denn der Ausdruck für t wird imaginär für negative x. Man kann auch nicht annehmen, daß für negative x eine andere Bewegungsgleichung gölte, denn die Gleichung $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{m}{x^2}$ gehört dem Falle an, wenn die Kraft abstoßend wirkt, und ihr Integral enthält Logarithmen statt der Kreisbogen. Die Bewegung des Punktes auf der andern Seite von O, d. h. zwischen O und X_1, würde also einem ganz andern Gesetze folgen, als die zwischen O und X. Der bewegte Punkt kann also nicht auf die entgegengesetzte Seite von O gelangen, sondern er muß, obgleich seine Geschwindigkeit in O unendlich groß ist, wieder umkehren und von O nach X zurückgehen. Daß dies wirklich stattfinden muß, erhellt auch daraus, daß wenn der bewegliche Punkt in X einen unendlich kleinen schiefen Stoß erhalten hätte, er um O eine langgestreckte Ellipse beschreiben würde, deren Brennpunkt O wäre und die sehr wenig von einer geraden Linie verschieden sein würde. Auch in diesem Falle würde der bewegte Punkt mit einer unendlich großen Geschwindigkeit unendlich nahe um O herum gegangen sein. Man sieht also, daß wenn der Punkt gar keinen Stoß erhält, er nur bis O gehen und dann umkehren wird. Die Zeit, welche der Punkt gebraucht, um von X nach O zu gelangen, ist nach unserer Formel:

$$t = \pi\sqrt{\frac{a^3}{8m}}.$$

Käme der Punkt aus der Entfernung a', so gebrauchte er eine Zeit:

$$t' = \pi\sqrt{\frac{a'^3}{8m}}$$

und man erhielte:

$$t^2 : t'^2 = a^3 : a'^3$$

ganz ähnlich dem dritten Keplerschen Gesetze, welches bei der Planetenbewegung gilt, woraus also ebenfalls die Analogie beider Bewegungen einleuchtet. Bei der Rückkehr des Punktes von O nach X gilt die Gleichung:

$$\frac{dx}{dt} = +\sqrt{2m\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)},$$

woraus man:

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{8m}}\{\pi + f(x)\}$$

findet. Man erhält nun folgende Gleichungen für die Bewegung:

Für die Bewegung des Punktes	Der Punkt befindet sich
von X nach O ist $t = \sqrt{\frac{a^3}{8m}}(\pi - fx)$	in O zur Zeit $t = \pi\sqrt{\frac{a^3}{8m}}$
von O nach X ist $t = \sqrt{\frac{a^3}{8m}}(\pi + fx)$	in a zur Zeit $t = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{8m}}$
von X nach O ist $t = \sqrt{\frac{a^3}{8m}}(3\pi - fx)$	in O zur Zeit $t = 3\pi\sqrt{\frac{a^3}{8m}}$
von O nach X ist $t = \sqrt{\frac{a^3}{8m}}(3\pi + fx)$	in a zur Zeit $t = 4\pi\sqrt{\frac{a^3}{8m}}$
von X nach O ist $t = \sqrt{\frac{a^3}{8m}}(5\pi - fx)$	in O zur Zeit $t = 5\pi\sqrt{\frac{a^3}{8m}}$
. . . . .	. . . . .

II.

Wir wollen nun nach denselben Voraussetzungen, wie im Vorhergehenden, die Bewegung zweier Punkte bestimmen, welche sich in derselben geraden Linie bewegen und sich umgekehrt wie die Kuben ihrer Entfernung anziehen.

Nehmen wir wiederum die gerade Linie, in welcher sich die zwei Punkte bewegen, als Abscissenare an, und nennen ihre Coordinaten ξ und ξ_1, ihre Massen bezüglich m und m_1, so erhält man folgende Gleichungen für die Bewegung der Punkte, wenn man annimmt, daß $\xi_1 > \xi$ ist:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{m_1}{(\xi_1-\xi)^2} \qquad 1.$$

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = -\frac{m}{(\xi_1-\xi)^2}. \qquad 2.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen bezüglich mit m und m_1 und addirt sie, so ergiebt sich:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} + m_1\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = 0, \qquad 3.$$

und hieraus durch Integration:

$$m\frac{d\xi}{dt} + m_1\frac{d\xi_1}{dt} = c. \qquad 4.$$

Sind α und α_1 die Anfangsgeschwindigkeiten der Punkte, so ist:

$$c = m\alpha + m_1\alpha_1. \qquad 5.$$

Aus 4. ergiebt sich durch Integration:

$$m\xi + m_1\xi_1 = ct + c_1. \qquad 6.$$

Sind a und a_1 die Anfangspositionen der Punkte, so ist:

$$c_1 = ma + m_1a_1. \qquad 7.$$

Es sei

$$\xi = u + x$$
$$\xi_1 = u + x_1$$

so ist:

$$m\xi + m_1\xi_1 = mx + m_1x_1 + (m + m_1)u. \qquad 8.$$

Da man die beiden Variabelen durch drei Größen ausgedrückt hat, so kann man über eine willkürlich verfügen und setzen:

$$m\xi + m_1\xi_1 = (m + m_1)u = ct + c_1, \qquad 9.$$

wodurch man erhält:

$$mx + m_1x_1 = 0. \qquad 10.$$

Aus der Gleichung 9. sieht man, daß u der Schwerpunkt der Massen ist und daß sich derselbe mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortbewegt. Sind die Anfangsgeschwindigkeiten Null, wodurch also c Null wird, so bleibt der Schwerpunkt immer in Ruhe.

Da $\frac{du}{dt} = \frac{c}{m+m_1}$, also $\frac{d^2u}{dt^2} = 0$ und $\frac{d\xi}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dx}{dt}$, also $\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$ und $\xi_1 - \xi = x_1 - x$ ist, so erhält man statt der Gleichung 1.:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{m_1}{(x_1-x)^2}. \qquad 11.$$

Drückt man vermittelst der Gleichung 10. x_1 durch x aus und setzt $m + m_1 = M$, so geht die Gleichung 11. über in:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m_1^4}{x^2M^3}$$

oder wenn man noch zur Abkürzung $\frac{m_1^4}{M^3} = A$ setzt, in:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{A}{x^3}$$

woraus sich durch Integration ergiebt:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{\sqrt{A + c_2 x^2}}{x}.$$

Diese Gleichung ist aber ganz übereinstimmend mit der Gleichung 4. in §. I., mithin läßt sich die Bewegung der beiden Punkte ebenso vollständig bestimmen, wie bei der ersten Annahme, wo der eine Punkt fest war. Es gelten also auch für diese Bewegung ganz dieselben Gleichungen, wenn man nur m mit A und c mit c_2 vertauscht, und es bewegen sich beide Punkte ebenso um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt, wie in der ersten Aufgabe der eine bewegliche um den festen.

Lassen wir jetzt die beiden Punkte sich nach dem Newtonschen Gesetze anziehn, so erhalten wir folgende Gleichungen für die Bewegung der Punkte:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{m_1}{(\xi_1 - \xi)^2}$$

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = -\frac{m}{(\xi_1 - \xi)^2}.$$

Der Gang der Rechnung ist ganz derselbe, als bei der vorhergehenden Aufgabe, wir wollen ihn daher nur kurz andeuten. Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} + m_1\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = 0$$

und hieraus:

$$m\frac{d\xi}{dt} + m_1\frac{d\xi_1}{dt} = c,$$

wo

$$c = m\alpha + m_1\alpha_1.$$

Ferner erhält man durch Integration der vorhergehenden Gleichung:

$$m\xi + m_1\xi_1 = ct + c_1,$$

wo

$$c_1 = ma + m_1a_1$$

ist. Es sei

$$\xi = u + x$$
$$\xi_1 = u + x_1,$$

dann ist:

$$m\xi + m_1\xi_1 = (m+m_1)u + mx + m_1x_1.$$

Setzt man

$$m\xi + m_1\xi_1 = (m+m_1)u = ct + c_1,$$

so ergiebt sich

$$mx + m_1x_1 = 0$$

und $(m+m_1)\frac{du}{dt} = c$, also $\frac{d^2u}{dt^2} = 0$, mithin $\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$, und da $\xi_1 - \xi = x_1 - x$ ist, so erhält man statt der ersten Gleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{m_1}{(x_1 - x)^2}$$

oder da $x_1 = -\frac{m}{m_1} x$ ist:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{m_1{}^3}{x^2(m+m_1)^2}.$$

Hieraus ist:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{2m_1{}^3}{x(m+m_1)^2} + c_2.$$

Um die Constante c_2 zu bestimmen, muß man sich aus den früheren Gleichungen den Werth von x und $\frac{dx}{dt}$ für die Zeit $t = o$ berechnen, und man findet dann:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \frac{m_1(\alpha - \alpha_1)}{m + m_1} \text{ und } x_0 = -\frac{m_1(a_1 - a)}{m + m_1}, \text{ also}$$

$$c_2 = \frac{m_1{}^2\{(\alpha - \alpha_1)^2(a_1 - a) - 2(m+m_1)\}}{(m+m_1)^2(a_1 - a)}.$$

Der Einfachheit wegen wollen wir aber annehmen, daß $x = -a'$ war, zur Zeit $t = o$ und daß die Anfangsgeschwindigkeiten der Punkte Null sind. Man erhält dann:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2m_1{}^3}{(m+m_1)^2}\left\{-\frac{1}{x} - \frac{1}{a'}\right\}$$

mithin:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{m_1}{m+m_1}\sqrt{2m_1}\sqrt{-\frac{1}{x} - \frac{1}{a'}}.$$

Die Wurzelgröße ist hier aber keineswegs imaginär, denn bei der Bewegung des Punktes nach dem gemeinschaftlichen Schwerpunkt hin ist x stets negativ, mithin $-\frac{1}{x}$ eine positive Größe, und ebenso ist auch bei diesem Theil der Bewegung dx negativ. Es ist daher in der vorigen Gleichung für die Bewegung zum Schwerpunkt hin das untere Vorzeichen der Wurzel zu nehmen, das obere dagegen für die Bewegung zurück. Man sieht aus dieser Gleichung zugleich auch, daß der bewegliche Punkt nicht über den Schwerpunkt hinaus kann, obgleich seine Geschwindigkeit in demselben unendlich groß ist, denn für positive x wird die Wurzel imaginär, er wird also ganz ähnlich, wie bei der frühern Annahme, wo der zweite Punkt fest war, wieder umkehren müssen. Setzen wir in der Gleichung $x = -y$, so erhält man für die erste Bewegung des Punktes zum Schwerpunkt hin:

$$t = \frac{m+m_1}{m_1\sqrt{2m_1}}\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{y} - \frac{1}{a'}}}$$

$$= \frac{m+m_1}{m_1}\sqrt{\frac{a'}{8m_1}}\left\{\arccos\left(1 - \frac{2y}{a'}\right) - \frac{2}{a'}\sqrt{a'y - y^2}\right\} + \text{const.}$$

in welcher Formel y zu nehmen ist von a' bis Null. Zur Zeit $t = o$ war $y = a'$, da-

durch erhält man: $\text{const} = -\frac{m+m_1}{m_1}\sqrt{\frac{a^3}{8m_1}}\,\pi$. Bezeichnen wir $\arccos\left(1-\frac{2y}{a'}\right) - \frac{2}{a'}\sqrt{a'y-y^2}$ mit $f(y)$, so ist:

$$t = \frac{m+m_1}{m_1}\sqrt{\frac{a^3}{8m_1}}\,\{f(y)-\pi\}.$$

Die Zeit, in welcher der Punkt im Schwerpunkte ankommt, findet sich, wenn man in der vorigen Gleichung $y = o$ setzt, man hat daher:

$$t = \frac{m+m_1}{m_1}\sqrt{\frac{a^3}{8m_1}}\,\pi.$$

Wie wir schon bemerkt haben, muß von jetzt an der Punkt wieder zurückkehren, und wir erhalten für den Theil der Bewegung vom Schwerpunkte nach der Anfangsposition des Punktes:

$$t = -\frac{m+m_1}{m_1\sqrt{2m_1}}\int\frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{y}-\frac{1}{a'}}} = -\frac{m+m_1}{m_1}\sqrt{\frac{a^3}{8m_1}}\,fy + \text{const.}$$

Es war aber $t = \pi\frac{m+m_1}{m_1}\sqrt{\frac{a^3}{8m_1}}$ für $y = o$, mithin ist:

$$t = \frac{m+m_1}{m_1}\sqrt{\frac{a^3}{8m_1}}\,(3\pi - fy).$$

Zur bessern Uebersicht wollen wir die Gleichungen für die einzelnen Theile der Bewegung zusammenstellen. Man hat also:

Für die Bewegung des Punktes		Der Punkt befindet sich	
v. a′ u. d. Schwpkt.	$t=\frac{m+m_1}{m_1}\sqrt{\frac{a^3}{8m_1}}(fy-\pi)$	im Schwerpunkt zur Zeit	$t=\pi\frac{m+m_1}{m_1}\sqrt{\frac{a^3}{8m_1}}$
v. Schwpkt. nach a′	$t=\frac{m+m_1}{m_1}\sqrt{\frac{a^3}{8m_1}}(3\pi-fy)$	in a′ zur Zeit	$t=2\pi\frac{m+m_1}{m_1}\sqrt{\frac{a^3}{8m_1}}$
v. a′ n. d. Schwpkt.	$t=\frac{m+m_1}{m_1}\sqrt{\frac{a^3}{8m_1}}(\pi+fy)$	im Schwerpunkt zur Zeit	$t=3\pi\frac{m+m_1}{m_1}\sqrt{\frac{a^3}{8m_1}}$
v. Schwpkt. nach a′	$t=\frac{m+m_1}{m_1}\sqrt{\frac{a^3}{8m_1}}(5\pi-fy)$	in a′ zur Zeit	$t=4\pi\frac{m+m_1}{m_1}\sqrt{\frac{a^3}{8m_1}}$
v. a′ n. d. Schwpkt.	$t=\frac{m+m_1}{m_1}\sqrt{\frac{a^3}{8m_1}}(3\pi+fy)$	im Schwerpunkt zur Zeit	$t=5\pi\frac{m+m_1}{m_1}\sqrt{\frac{a^3}{8m_1}}$
. . . . .		. . . . .	

Ganz ähnliche Gleichungen finden auch für die Bewegung des zweiten Punktes statt, und es tritt auch hier der merkwürdige Fall ein, daß die beiden Punkte bis zu ihrem Schwerpunkte gehen, und dann, obgleich sie in demselben eine unendliche Geschwindigkeit haben, wieder umkehren. Diese merkwürdige Erscheinung läßt sich dadurch erklären, daß die Punkte, wenn sie unendlich kleine schiefe Stöße erhalten haben würden, sehr langgestreckte

Ellipsen um den Schwerpunkt, als gemeinschaftlichen Brennpunkt, beschrieben. Diese Ellipsen würden wenig von der geraden Linie verschieden sein, und die Bewegung der beiden Punkte ist der ähnlich, die wir bei unserer Aufgabe gefunden haben.

III.

Es mögen sich drei materielle Punkte, welche sich umgekehrt, wie die Kuben ihrer Entfernungen, anziehen, in derselben geraden Linie bewegen.

Nimmt man diese gerade Linie als Abscissenare an und nennt die Coordinaten der Punkte ξ, ξ_1, ξ_2, die Masse derselben bezüglich m, m_1, m_2, so erhält man, wenn man die früheren Vereinfachungen beibehält, folgende drei Bewegungsgleichungen unter der Voraussetzung, daß $\xi_2 > \xi_1 > \xi$ ist:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{m_1}{(\xi_1 - \xi)^3} + \frac{m_2}{(\xi_2 - \xi)^3} \qquad 1.$$

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = \frac{m_2}{(\xi_2 - \xi_1)^3} - \frac{m}{(\xi_1 - \xi)^3} \qquad 2.$$

$$\frac{d^2\xi_2}{dt^2} = -\frac{m_1}{(\xi_2 - \xi_1)^3} - \frac{m}{(\xi_2 - \xi)^3} \qquad 3.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen bezüglich mit m, m_1, m_2 und addirt sie alle drei, so erhält man:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} + m_1\frac{d^2\xi_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2\xi_2}{dt_2} = 0 \qquad 4.$$

und hieraus durch Integration:

$$m\frac{d\xi}{dt} + m_1\frac{d\xi_1}{dt} + m_2\frac{d\xi_2}{dt} = c \qquad 5.$$

Um die Constante zu bestimmen, wollen wir die Anfangsgeschwindigkeiten mit α, α_1, α_2 bezeichnen, dann wird:

$$c = m\alpha + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 \qquad 6.$$

Aus der Gleichung 5. ergiebt sich durch Integration:

$$m\xi + m_1\xi_1 + m_2\xi_2 = ct + c_1 \qquad 7.$$

Nennt man die Anfangspositionen der drei Punkte a, a_1, a_2, so erhält man für die Constante:

$$c_1 = ma + m_1a_1 + m_2a_2 \qquad 8.$$

Man kann den Anfangspunkt der Coordinaten immer so legen, daß $c_1 = 0$ wird. Dies geschieht, wenn man den anfänglichen Schwerpunkt der drei materiellen Punkte als Anfangspunkt der Coordinaten wählt.

Es sei:

$$\begin{aligned} \xi &= u + x \\ \xi_1 &= u + x_1 \\ \xi_2 &= u + x_2 \end{aligned} \qquad 9.$$

dann erhält man:

10. $$m\xi + m_1\xi_1 + m_2\xi_2 = mx + m_1x_1 + m_2x_2 + (m + m_1 + m_2)u$$

Da man die Größen ξ, ξ_1, ξ_2 durch vier Variabele ausgedrückt hat, so kann man über eine beliebig verfügen und setzen:

11. $$(m + m_1 + m_2)u = m\xi + m_1\xi_1 + m_2\xi_2$$

oder

12. $$(m + m_1 + m_2)u = ct + c_1$$

wodurch sich aus 10. ergiebt:

13. $$mx + m_1x_1 + m_2x_2 = o$$

Aus der Gleichung 11. ersieht man, daß u die Abscisse des Schwerpunkts der drei Massen ist, und aus der Gleichung 12., daß dieser Schwerpunkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortrückt. Ist aber $c = o$, welches z. B. stattfindet, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten Null sind, so bleibt der Schwerpunkt in Ruhe.

Aus der Gleichung 12. ergiebt sich durch Differentiation:

$$(m + m_1 + m_2)\frac{du}{dt} = c$$

folglich:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = o$$

Daher erhält man aus den Gleichungen 9.:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{d^2\xi_1}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2},\quad \frac{d^2\xi_2}{dt^2} = \frac{d^2x_2}{dt^2}$$

und

$$\xi_1 - \xi = x_1 - x,\quad \xi_2 - \xi = x_2 - x,\quad \xi_2 - \xi_1 = x_2 - x_1$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen 1. bis 3., so erhält man:

14. $$\frac{d^2x}{dt_2} = \frac{m_1}{(x_1 - x)^3} + \frac{m_2}{(x_2 - x)^3}$$

15. $$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{m_2}{(x_2 - x_1)^3} - \frac{m}{(x_1 - x)^3}$$

16. $$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{m_1}{(x_2 - x_1)^3} - \frac{m}{(x_2 - x)^3}$$

Es sei zur Abkürzung:

17. $$\frac{mm_1}{(x_1 - x)^2} + \frac{mm_2}{(x_2 - x)^2} + \frac{m_1m_2}{(x_2 - x_1)^2} = \lambda$$

dann ist:

$$\frac{d\lambda}{dx} = 2m\frac{d^2x}{dt^2};\quad \frac{d\lambda}{dx_1} = 2m_1\frac{d^2x_1}{dt^2};\quad \frac{d\lambda}{dx_2} = 2m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}$$

und da:

$$d\lambda = \frac{d\lambda}{dx}dx + \frac{d\lambda}{dx_1}dx_1 + \frac{d\lambda}{dx_2}dx_2$$

so folgt:

$$2m\frac{d^2x}{dt^2}dx + 2m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}dx_1 + 2m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}dx_2 = d\lambda \qquad 18.$$

woraus sich durch Integration ergiebt:

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m_1\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + m_2\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 = \lambda + c_2 \qquad 19.$$

Um die Constante c_2 zu bestimmen, muß man sich aus den Gleichungen 9. die Werthe von x, x_1, x_2, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$ für die Zeit $t = o$ berechnen. Man findet, wenn man $m + m_1 + m_2 = M$ setzt:

$$\begin{aligned}(x)_o &= -\frac{m_1(a_1-a) + m_2(a_2-a)}{M} = b\\ (x_1)_o &= \frac{m(a_1-a) - m_2(a_2-a_1)}{M} = b_1 \qquad 20.\\ (x_2)_o &= \frac{m(a_2-a) + m_1(a_2-a)}{M} = b_2\end{aligned}$$

Hieraus ist:

$$b_1 - b = a_1 - a, \quad b_2 - b = a_2 - a, \quad b_2 - b_1 = a_2 - a_1$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)_o &= -\frac{m_1(\alpha_1-\alpha) + m_2(\alpha_2-\alpha)}{M} = \beta\\ \left(\frac{dx_1}{dt}\right)_o &= \frac{m(\alpha_1-\alpha) - m_2(\alpha_2-\alpha_1)}{M} = \beta_1 \qquad 21.\\ \left(\frac{dx_2}{dt}\right)_o &= \frac{m(\alpha_2-\alpha) + m_1(\alpha_2-\alpha_1)}{M} = \beta_2\end{aligned}$$

Es ist:

$$m\beta + m_1\beta_1^2 + m_2\beta_2^2 = \frac{1}{M^2}\begin{Bmatrix} mm_1^2(\alpha_1-\alpha)^2 + 2mm_1m_2(\alpha_1-\alpha)(\alpha_2-\alpha) + mm_2^2(\alpha_2-\alpha)^2 + \\ m_1m^2(\alpha_1-\alpha)^2 - 2mm_1m_2(\alpha_1-\alpha)(\alpha_2-\alpha_1) + m_1m_2^2(\alpha_2-\alpha_1)^2 + \\ m_2m^2(\alpha_2-\alpha)^2 + 2mm_1m_2(\alpha_2-\alpha)(\alpha_2-\alpha_1) + m_2m_1^2(\alpha_2-\alpha_1)^2 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{M^2}\Big\{mm_1(m+m_1)(\alpha_1-\alpha)^2 + mm_2(m+m_2)(\alpha_2-\alpha)^2 + m_1m_2(m_1+m_2)(\alpha_2-\alpha_1)^2 + 2mm_1m_2[(\alpha_1-\alpha)(\alpha_2-\alpha) - (\alpha_1-\alpha)(\alpha_2-\alpha_1) + (\alpha_2-\alpha)(\alpha_2-\alpha_1)]\Big\}$$

$$= \frac{1}{M^2}\Big\{mm_1(m+m_1)(\alpha_1-\alpha)^2 + mm_2(m+m_2)(\alpha_2-\alpha)^2 + m_1m_2(m_1+m_2)(\alpha_2-\alpha_1)^2 + mm_1m_1[(\alpha_1-\alpha)^2 + (\alpha_2-\alpha)^2 + (\alpha_2-\alpha_1)^2]\Big\}$$

$$= \frac{mm_1(\alpha_1-\alpha)^2 - mm_2(\alpha_2-\alpha)^2 + m_1m_2(\alpha_2-\alpha_1)^2}{M}$$

Hiernach wird die Constante:

$$c_2 = \frac{mm_1(\alpha_1-\alpha)^2 + mm_2(\alpha_2-\alpha)^2 + m_1m_2(\alpha_2-\alpha_1)^2}{M} - \frac{mm_1}{(a_1-a)^2} - \frac{mm_2}{(a_2-a)^2} - \frac{m_1m_2}{(a_2-a_1)^2} \qquad 22.$$

Aus den Gleichungen 14. bis 16. ergiebt sich ferner:

23. $$m x \frac{d^2x}{dt^2} + m_1 x_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + m_2 x_1 \frac{d^2x_2}{dt^2} = -\lambda$$

Addirt man die Gleichungen 23. und 19. und integrirt dann, so erhält man:

24. $$m x \frac{dx}{dt} + m_1 x_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 x_2 \frac{dx_2}{dt} = c_2 t + c_3$$

wo

$$c_3 = m b \beta + m_1 b_1 \beta_1 + m_2 b_2 \beta_2$$

ist. Wenn man die Werthe einsetzt und eine ähnliche Reduction vornimmt, wie bei der Bestimmung von c_2, so findet man:

25. $$c_3 = \frac{m m_1 (a_1 - a)(\alpha_1 - \alpha) + m m_2 (a_2 - a)(\alpha_2 - \alpha) + m_1 m_2 (a_2 - a_1)(\alpha_2 - \alpha_1)}{M}$$

Integrirt man die Gleichung 24., so ergiebt sich:

26. $$m x^2 + m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 = c_2 t^2 + 2 c_3 t + c_4$$

wo die Constante bestimmt ist durch:

27. $$c_4 = \frac{m m_1 (a_1 - a)^2 + m m_2 (a_2 - a)^2 + m_1 m_2 (a_2 - a_1)^2}{M}$$

Vermittelst der Gleichungen 13. und 26. kann man x_1 und x_2 durch x ausdrücken, und findet, wenn man

$$c_2 t^2 + 2 c_3 t + c_4 = \tau^2$$

setzt:

28. $$x_1 = \frac{-mx \pm \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \sqrt{(m_1 + m_2)\tau^2 - m x^2 M}}{m_1 + m_2}$$

29. $$x_2 = \frac{-mx \mp \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \sqrt{(m_1 + m_2)\tau^2 - m x^2 M}}{m_1 + m_2}$$

Da der Schwerpunkt stets zwischen die drei Massen fällt und wir die Punkte anfänglich so vertheilt haben, daß $\xi_2 > \xi_1 > \xi$ war, so ist x wenigstens im Anfange der Bewegung negativ und $x_2 > x_1$. Es kann daher in dem Ausdrucke von x_1 und x_2 nur das untere Zeichen vor der Wurzel gelten. Setzt man $m_1 + m_2 = \mu$ und bildet $x_1 - x$, $x_2 - x$ und $x_2 - x_1$, so ist:

30. $$x_1 - x = \frac{-Mx - \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \sqrt{\mu\tau^2 - m x^2 M}}{\mu}$$

31. $$x_2 - x = \frac{-Mx + \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \sqrt{\mu\tau^2 - m x^2 M}}{\mu}$$

32. $$x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{\mu\tau^2 - m x^2 M}}{\sqrt{m_1 m_2}}$$

Differentiirt man die Gleichung 13., so ergiebt sich:

$$m\frac{dx}{dt} + m_1\frac{dx_1}{dt} + m_2\frac{dx_2}{dt} = o \qquad 33.$$

Aus dieser Gleichung und aus der Gleichung 24. kann man $\frac{dx_1}{dt}$ und $\frac{dx_2}{dt}$ durch $\frac{dx}{dt}$ ausdrücken, so daß man erhält, wenn man zur Abkürzung $c_2t + c_3 = T$ setzt:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{T - m(x-x_2)\frac{dx}{dt}}{m_1(x_1-x_2)} \qquad 34.$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{T - m(x-x_1)\frac{dx}{dt}}{m_2(x_2-x_1)} \qquad 35.$$

Setzt man nun diese beiden Werthe in die Gleichung 19., so folgt:

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\left(T - m(x-x_2)\frac{dx}{dt}\right)^2}{m_1(x_2-x_1)^2} + \frac{\left(T - m(x-x_1)\frac{dx}{dt}\right)^2}{m_2(x_2-x_1)^2} = \lambda + c_2 \qquad 36.$$

welche Gleichung nach einigen Umformungen folgende Gestalt annimmt:

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\{m_1m_2(x_1-x_2)^2 + mm_2(x-x_2)^2 + mm_1(x-x_1)^2\} - 2mT\frac{dx}{dt}\{m_2(x-x_2) + m_1(x-x_2)\}$$
$$= m_1m_2(x_2-x_1)^2(\lambda+c_2) - (m_2+m_1)T^2 \qquad 37.$$

Multiplicirt man aber die Gleichung 26. mit M und zieht davon das Quadrat der Gleichung 13. ab, so überzeugt man sich leicht, daß:

$$m_1m_2(x_1-x_2)^2 + mm_2(x-x_2)^2 + mm_1(x-x_1)^2 = M\tau^2 \qquad 38.$$

ist. Ebenso ergiebt sich mit Rücksicht auf die Gleichung 13., daß:

$$m_2(x-x_2) + m_1(x-x_1) = Mx \qquad 39.$$

ist. Hierdurch verwandelt sich die Gleichung 36. in die einfachere:

$$mM\tau^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2mMTx\frac{dx}{dt} = m_1m_2(x_2-x_1)^2(\lambda+c_2) - (m_2+m_1)T^2 \qquad 40.$$

Setzt man nun in λ für die Größen $x_1 - x$, $x_2 - x$, $x_2 - x_1$ die durch die Gleichungen 30. bis 32. bestimmten Werthe, so geht die Gleichung 38. nach einigen Umformungen über in:

$$mM\tau^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2mMTx\frac{dx}{dt}$$

$$+ m_1m_2\mu^3(\mu - mx^2M)\frac{\{m_1m_2M^2x^2 + 2M(m_2-m_1)x\sqrt{m_1m_2}\sqrt{\mu\tau^2 - mx^2M} + (m_1^2 - m_1m_2 + m_2^2)(\mu\tau_2 - mx^2M)\}}{\{m_1m_2M^2x^2 + M(m_2-m_1)x\sqrt{m_1m_2}\sqrt{\mu\tau^2 - mx^2M} - m_1m_2(\mu\tau^2 - mx^2M)\}^2}$$
$$+ m_1^2m_2^2 + c_2(\mu\tau^2 - mx^2M) - \mu T^2$$

oder in:

$$mM\left\{\tau^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2Tx\frac{dx}{dt} + c_2x^2\right\}$$

$$= mm_1m_2\mu^2(\mu - mx^2M)\frac{\{m_1m_2M^2x^2 + 2M(m_2-m_1)x\sqrt{m_1m_2}\sqrt{\mu\tau^2 - mx^2M} + (m_1^2 - m_1m_2 + m_2^2)(\mu\tau^2 - mx^2M)\}}{\{m_1m_2M^2x^2 + M(m_2-m_1)x\sqrt{m_1m_2}\sqrt{\mu\tau^2 - mx^2M} - m_1m_2(\mu\tau^2 - mx^2M)\}^2}$$

$$+ m_1^2m_2^2 - \mu(T^2 - c_2\tau^2) \qquad 41.$$

Es sei nun:

$$x = \tau v$$

ist:

$$\frac{dx}{dt} = v\frac{d\tau}{dt} + \tau\frac{dv}{dt}$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung 39. und bedenkt, daß $\tau\frac{d\tau}{dt} = T$ und $T^2 - c_2t = (c_3^2 - c_2c_4)$, so erhält man endlich:

$$mM\tau^4\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

$$(\mu - mv^2M)\frac{\{m_1m_2M^2v^2 + 2Mv(m_2-m_1)\sqrt{m_1m_2}\sqrt{\mu - mv^2M} + (m_1^2 - m_1m_2 + m_2^2)(\mu - mv^2M)\}}{\{m_1m_2M^2v^2 + Mv(m_2-m_1)\sqrt{m_1m_2}\sqrt{\mu - mv^2M} - m_1m_2(\mu - mv^2M)\}^2} - (c_3^2 - c_2c_4)(\mu - mv^2M) + m_1^2m_2^2$$

oder

$$\tau = \int \frac{mMdv}{\sqrt{mm_1m_2\mu^2(\mu - mv^2M)\frac{\{m_1m_2M^2v^2 + 2Mv(m_2-m_1)\sqrt{m_1m_2}\sqrt{\mu - mv^2M} + (m_1^2 - m_1m_2 + m_2^2)(\mu - mv^2M)\}}{\{m_1m_2M^2v^2 + Mv(m_2-m_1)\sqrt{m_1m_2}\sqrt{\mu - mv^2M} - m_1m_2(\mu - mv^2M)\}^2} - (c_3^2 - c_2c_4)(\mu - mv^2M) + m_1^2m_2^2}}$$

oder

$$t + c_4 = \int \frac{mMdv}{\sqrt{mm_1m_2\mu^2(\mu - mv^2M)\frac{\{[Mv\sqrt{m_1m_2} + (m_2-m_1)\sqrt{\mu - mv^2M}]^2 + m_1m_2(\mu - mv^2M)\}}{\{[Mv\sqrt{m_1m_2} + \frac{1}{2}(m_2-m_1)\sqrt{\mu - mv^2M}]^2 - \frac{1}{4}\mu^2(\mu - mv^2M)\}} - (c_3^2 - c_2c_4)(\mu - mv^2M) + m_1^2m_2^2}} \qquad 42.$$

Somit wäre das Problem wenigstens bis zu den Quadraturen geführt. Das Integral links läßt sich integriren und wird entweder logarithmisch odrr trigonometrisch, je nachdem $\frac{c_3}{c_2}$ negativ oder positiv ist.

Da das Integral auf der rechten Seite der Gleichung eine sehr complicirte Form hat, so wird es nicht uninteressant sein, einen Weg zu zeigen, auf welchem man zu einem etwas einfachern Integral gelangt. Es sei zu dem Ende:

$$\begin{aligned} x_1 - x &= y \\ x_2 - x &= yv \\ x_2 - x_1 &= y(v-1) \end{aligned} \qquad 43.$$

Dann geht durch Substitution dieser Werthe die Gleichung

$$mm_1\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx}{dt}\right)^2 + m_2m\left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx}{dt}\right)^2 + m_1m_2\left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)^2 = M(\lambda + c_2) \qquad 44.$$

welche man aus den Gleichungen 19. und 13. erhält, nachdem man die letztere noch einmal differentiirt hat, über in:

$$mm_1\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + m_2m\left(\frac{d.yv}{dt}\right)^2 + m_1m_2\left(\frac{d.yv}{dt} - \frac{dy}{dt}\right)^2 = M(\lambda + c_2) \qquad 45.$$

Die Gleichung:

$$m_1m_2(x_1 - x_2)^2 + m_2m(x_2 - x)^2 + mm_1(x_1 - x) = M\tau^2$$

nimmt durch obige Werthe folgende Gestalt an:

$$y^2\{m_1m_2(v-1)^2 + mm_2v^2 + mm_1\} = M\tau^2 \qquad 46.$$

oder wenn man zur Abkürzung setzt:

$$m_1m_2(v-1)^2 + mm_2v^2 + mm_1 = z \qquad 47.$$

folgende Form:

$$y^2 = \frac{M\tau^2}{z} \qquad 48.$$

woraus

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{d\tau}{dt} - \frac{\tau}{2z}\frac{dz}{dv}\frac{dv}{dt}\right)\sqrt{\frac{M}{z}} \qquad 49.$$

Führt man die in der Gleichung 45. angedeuteten Operationen aus und führt die Abkürzung 47. ein, so erhält man:

$$z\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y\frac{dy}{dt}\frac{dv}{dt}\frac{dz}{dt} + m_2(m+m_1)y^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = M(\lambda + c_2) \qquad 50.$$

oder wenn man für y und $\frac{dy}{dt}$ die Werthe setzt und die nöthigen Vereinfachungen vornimmt:

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 - \frac{\tau^2}{4z}\left(\frac{dz}{dv}\right)^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + m_2(m+m_1)\frac{\tau^2}{z}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \lambda + c_2$$

oder wenn man $\left(\frac{dz}{dv}\right)^2$ berechnet:

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 + mm_1m_2M\frac{\tau^2}{z^2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \lambda + c_2 \qquad 51.$$

Es ist aber durch Substitution der Werthe 43.

$$\lambda = \frac{1}{y^2}\left\{mm_1 + \frac{mm_2}{v^2} + \frac{m_1m_2}{(v-1)^2}\right\}$$

mithin wird die Gleichung 51.

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + mm_1m_2M\frac{r^2}{z^2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = c_2 + \frac{z}{Mr^2}\left\{\frac{mm_1v^2(v-1)^2 + mm_2(v-1)^2 + m_1m_2v^2}{v^2(v-1)^2}\right\}$$

Multiplicirt man mit Mr^2 und bedenkt, daß $c_2r^2 - r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c_2c_4 - c_3^2$ ist, so ergiebt sich:

52. $$Mr^2\left(\frac{dv}{dt}\right) = \pm z\sqrt{\frac{M(c_2c_4-c_3^2)v^2(v-1)^2 + z(mm_1v^2(v-1)^2 + mm_2(v-1)^2 + m_1m_2v^2)}{mm_1m_2v^2(v-1)^2}}$$

also:

$$\int \frac{dt}{c_2t^2 + 2c_3t + c_4}$$

$$= \int \frac{M\sqrt{mm_1m_2}\,v(v-1)\,dv}{[m_1m_2(v-1)(v-1)^2 + mm_2v^2 + mm_1]\sqrt{M(c_2c_4-c_3^2)v^2(v-1)^2 + [m_1m_2(v-1)^2 + mm_2v^2 + mm_1][mm_1v^2(v-1)^2 + mm_2(v-1)^2 + m_1m_2}}$$

Die Form dieses Integrals ist viel einfacher, als die des früher gefundenen.

Eine Einsicht in die Bewegung der drei Punkte verschafft uns die Gleichnng:

$$mx^2 + m_1x_1^2 + m_2x_2^2 = c_2t^2 + 2c_3t + c_4$$

In dieser Gleichung läßt sich die rechte Seite in ein Product verwandeln, so daß man erhält:

$$mx^2 + m_1x_1^2 + m_2x_2^2 = c_2\left(t + \frac{c_3 + \sqrt{c_3^2 - c_2c_4}}{c_2}\right)\left(t + \frac{c_3 - \sqrt{c_3^2 - c_2c_4}}{c_2}\right)$$

Ist nun c_2 und c_3 positiv, so ist $c_3 > \sqrt{c_3^2 - c_2c_4}$, da c_4 nur positiv sein kann, wie man aus der Gleichung 27. ersieht. In diesem Falle kann die rechte Seite obiger Gleichung nie Null werden, sondern giebt für jeden Werth von t einen bestimmten Werth für x, x_1 und x_2. Die drei materiellen Punkte kommen also nie in dem Schwerpunkte zusammen, sondern entfernen sich immer mehr von demselben, da, wie man aus den Gleichungen 28. und 29. sieht, $x_1 = \pm Ax$ und $x_2 = \pm Bx$ ist.

Wenn c_3 negativ, aber c_2 positiv ist, so nimmt obige Gleichung die Form an:

$$mx^2 + m_1x_1^2 + m_2x_2^2 = c_2(t-A)(t-B)$$

und ist $A > B$, so kann t nur Werthe haben von Null bis B. Ist $t = B$ geworden, so ist:

$$mx^2 + m_1x_1^2 + m_2x_2^2 = 0$$

welches nicht anders möglich ist, als wenn x, x_1 und x_2 jedes für sich Null ist. Für diesen Werth von t befinden sich also alle drei Punkte im Schwerpunkte, haben aber eine unendlich große Geschwindigkeit, wie man aus der Gleichung 19. ersieht.

Ist c_2 negativ und c_3 positiv, so wird $c_3 - \sqrt{c_3^2 - c_2c_4}$ negativ, also $\frac{c_3 - \sqrt{c_3^2 - c_2c_4}}{c_2}$ positiv, aber $\frac{c_3 + \sqrt{c_3^2 - c_2c_4}}{c_2}$ negativ, und unsere Gleichung wird von der Form:

$$mx^2 + m_1x_1^2 + m_2x_2^2 = c_2(A-t)(B+t)$$

In diesem Falle kann t nur Werthe annehmen von Null bis A, für welchen letztern Werth die drei Massen sich im Schwerpunkte befinden, aber eine unendlich große Geschwindigkeit haben.

Ist c_2 und c_3 negativ, so wird $c_3+\sqrt{c_3^2-c_2c_4}$ positiv, aber $\frac{c_3+\sqrt{c_3^2-c_2c_4}}{c_2}$ negativ und $\frac{c_3-\sqrt{c_3^2-c_2c_4}}{c_2}$ positiv, unsere Gleichung nimmt daher die Form an:

$$mx^2+m_1x_1^2+m_2x_2^2=c_2(A-t)(B+t)$$

welcher Fall mit dem vorhergehenden vollkommen übereinstimmt.

Die Hauptschwierigkeit für die Erklärung der Bewegung der drei Punkte bietet unsere Gleichung dar, wenn t einen größern Werth erhält, als den, welcher die rechte Seite der Gleichung zu Null macht; denn in diesem Falle wird die Gleichung imaginär, und dies kann nur so erklärt werden, daß die drei Punkte, nachdem sie im Schwerpunkte zusammen gekommen sind, sich nicht wieder trennen, obgleich ihre Geschwindigkeit unendlich ist, sondern mit dem Schwerpunkte sich gleichmäßig fortbewegen. Für diese Ansicht spricht auch noch die Betrachtung der Bewegung eines Punktes in einer Ebene um einen festen, denn dieser Punkt beschreibt um den festen eine Spirale, deren Windungen sich bedeutend verringern, wenn die Anfangsgeschwindigkeit eine sehr kleine ist. Wir wollen die Rechnung, welche zu der Gleichung der Curve führt, kurz andeuten. Nennen wir k die Kraft, mit welcher der feste Punkt den beweglichen in der Entfernung r anzieht; dann sind die Gleichungen der Bewegung:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{kx}{r};\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{ky}{r}$$

Hieraus ist:

$$dx\frac{d^2x}{dt^2}+dy\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{k}{r}(xdx+ydy)=-kdr$$

Setzen wir:

$$x=r\cos u,\quad y=r\sin u$$

so wird die vorhergehende Gleichung:

$$d\left(\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}\right)=d\left(\frac{dr^2+r^2du^2}{dt^2}\right)=-2kdr$$

Es ergiebt sich aus den ersten Gleichungen bekanntlich noch:

$$r^2\frac{du}{dt}=c=a\lambda$$

wenn wir a die Anfangsposition des Punktes nennen und die Anfangsgeschwindigkeit in zwei zerlegen, von denen wir die auf der Abscissenare senkrechte mit λ und die dieser Are parallele nach dem anziehenden Punkt gerichtete mit μ bezeichnen. Bestimmt man aus dieser Gleichung dt^2 und setzt den Werth in die vorhergehende Gleichung, so erhält man:

$$a^2\lambda^2d\left(\frac{dr^2+r^2du^2}{r^4du^2}\right)=a^2\lambda^2d\left(\frac{dr^2}{r^4du^2}+\frac{1}{r^2}\right)=-2kdr$$

Setzt man $\frac{1}{r} = \varrho$, so erhält man hieraus die Differentialgleichung der beschriebenen Curve:

$$\frac{d^2\varrho}{du^2} + \varrho = \frac{k}{a^2\lambda^2\varrho^2}$$

Diese Gleichung gilt für jedes Gesetz der Anziehung, da sich aber bei unserer Betrachtung die Punkte umgekehrt, wie die Kuben ihrer Entfernung anziehen, so ist $k = \frac{m}{r^3} = m\varrho^3$ zu setzen. Man hat also:

$$\frac{d^2\varrho}{du^2} = \frac{m\varrho}{a^2\lambda^2} - \varrho = \varrho\left(\frac{m}{a^2\lambda^2} - 1\right) = \varrho\alpha^2$$

wenn wir zur Abkürzung setzen $\frac{m}{a^2\lambda^2} - 1 = \alpha^2$.

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$\varrho = \frac{\alpha\lambda + \mu}{2a\alpha\lambda} e^{\alpha u} + \frac{\alpha\lambda - \mu}{2a\alpha\lambda} e^{-\alpha u}$$

Also ist:

$$r = \frac{2a\alpha\lambda}{(\alpha\lambda + \mu) e^{\alpha u} + (\alpha\lambda + \mu) e^{-\alpha u}}$$

Setzt man $\mu = o$, d. h. giebt man dem Punkte nur einen Stoß senkrecht gegen die Absciſſenare, so wird

$$r = \frac{2a}{e^{\alpha u} + e^{-\alpha u}}$$

oder

$$r = \frac{2a}{e^{u\sqrt{\frac{m}{a^2\lambda^2} - 1}} + e^{-u\sqrt{\frac{m}{a^2\lambda^2} - 1}}}$$

Ist nun λ sehr klein, so wird r mit wachsendem u ebenfalls sehr klein, und für ein unendlich kleines λ wird auch r unendlich klein, d. h. der bewegliche Punkt umkreist den festen in unendlicher Nähe, und zwar mit unendlich großer Geschwindigkeit. Sieht man nun die Bewegung in gerader Linie als einen Grenzfall von dieser Bewegung an, so würde daraus folgen, daß die Punkte sich nicht wieder trennen, sobald sie einmal zusammen gekommen sind. Etwas diesem Aehnliches findet auch bei der Bewegung der drei Punkte in gerader Linie statt, so daß diese sich ebenfalls nicht wieder trennen, wenn sie sich einmal vereinigt haben, welcher Fall durch das Imaginärwerden der x, x_1, x_2 der Gleichung $mx^2 + m_1x_1^2 + m_2x_2^2 = c_2t^2 + 2c_3t + c_4$ angedeutet wird.

Aus diesen Rechnungen über die Bewegung eines Punktes in der Ebene um einen festen ergiebt sich, daß wenn sich derselbe nur in der Verbindungslinie beider Punkte bewegt, er den festen zwar mit unendlich großer Geschwindigkeit erreicht, aber doch nicht über denselben hinausgeht. Hiernach ist die im Anfange gegebene Behandlung des Problems eigentlich nicht in der Natur der Sache begründet, ich habe sie aber mitgetheilt, weil einige Mathematiker das Problem in dieser Weise auffassen. Dr. E. Schellbach.

Schulnachrichten

von Ostern 1848 bis Ostern 1849.

A. Lehrverfassung.

I. Realschule.

Prima.

Ordinarius Professor Dr. Huberdt.

Religion. Uebersicht der Glaubenslehre. Wiederholung der wichtigsten Momente aus der Bibelkunde und Kirchengeschichte. 2 St. w. Der Direktor.

Mathematik. a) Geometrie. Analytische Geometrie, besonders Kegelschnitte. 3 St. w. b) Zahlenlehre. Theorie der Fakultäten, der Binomial-Coefficienten, der Reihen und der Gleichungen. 2 St. w. Huberdt.

Physik. Statik und Mechanik der festen Körper. 2 St. w. Huberdt.

Chemie. Die Metalle und deren Verbindungen. 2 St. w. Prof. Lindes.

Naturgeschichte. a) Botanik. Erläuterung der natürlichen Pflanzenfamilien. Demonstrationen phanerogamischer Pflanzen. 1 St. w. im Sommer. Daneben Excursionen. b) Zoologie. Vergleichende Zoologie. 1 St. w. im Winter. Oberl. Schulz. c) Mineralogie. Oryktognosie im Sommer. Geognosie im Winter. 1 St. w. Lindes.

Geschichte. Die neuere und neueste Geschichte. 2 St. w. Prof. Kalisch.

Geographie. Wiederholungen und Uebersichten mit Rücksicht auf die historisch merkwürdigeren Oertlichkeiten. 1 St. w. Kalisch.

Deutsch. Anleitung zur Entwerfung und Abfassung von Aufsätzen. Besprechung und Beurtheilung derselben. Literaturgeschichte. 3 St. w. Kalisch.

Latein. Livius lib. XXXII. bis XXXIII., cap. 35. 3 St. w. Virgilius, Aen. lib. II. 1 St. w. Exercitien, 1 St. w. Kalisch.

Französisch. Lectüre des poetischen Theils des Handbuchs von Büchner und Herrmann

Anleitung zum Gebrauch der feineren Redewendungen und Gallicismen. Besprechung der wichtigsten und schwierigsten Punkte der Grammatik. Freie Vorträge und Declamation. Exercitien, Extemporalien und Aufsätze 4 St. w. Prof. Herrmann.

Englisch. Lectüre des Vicar of Wakefield; Auswendiglernen einzelner Abschnitte. Wiederholung und weitere Erklärung der Syntax. Exercitien und Extemporalien. 2 St. w. Lehrer Schneider.

Zeichnen. Freies Zeichnen von Köpfen nach Gypsabgüssen. Unterricht in der Projections-Lehre. Zeichnen von Grund- und Aufrissen und Durchschnitten von Körpern. Zur häuslichen Uebung wurden Köpfe nach dem Leben, Gebäude und Landschaften nach der Natur gezeichnet. Mal. Schönau.

Ober-Secunda.

Ordinarius Professor Dielitz.

Religion. Im Sommer mit Prima combinirt. Im Winter Geschichte der christlichen Kirche. 2 St. w. Oberl. Dr. Spilleke.

Mathematik. a) Geometrie. Trigonometrie und Stereometrie. 3 St. w. b) Algebra. Uebungen im Umformen algebraischer Ausdrücke. Die Lehre von den Permutationen, Variationen und Combinationen. Die Gleichungen bis zum dritten Grade incl. mit vielen Uebungen. Der binomische Lehrsatz. 2 St. w. Huberdt.

Physik. Akustik und Magnetismus im Sommer. Electricität im Winter. 2 St. w. Lehrer Dr. Schellbach.

Chemie. Die Metalle, insbesondere die Alkali- und Erden-bildenden und deren Verbindungen. 2 St. w. Lindes.

Naturgeschichte. Im Sommer das Allgemeinste aus der Pflanzen-Physiologie, Demonstrationen lebender Pflanzen zur Einübung des natürlichen Systems von Jussieu. 1 St. w. Daneben Excursionen. Im Winter: Allgemeine Zoologie. 1 St. w. Schulz.

Geschichte. Alte und mittlere Geschichte, nach des Lehrers Grundriß der Weltgeschichte. 2 St. w. Dielitz.

Geographie. Wiederholung der physischen und politischen Geographie von Europa. 1 St. w. Dielitz.

Deutsch. Aufsätze, theils freie Ausarbeitungen, theils metrische Uebersetzungen. Declamation und freie Vorträge. Uebersicht der poetischen Literatur nach Formen und Gattungen. Lectüre aus Wackernagels Sammlung; Schillers Wallenstein, Göthes Götz von Berlichingen. 4 St. w. Dielitz.

Latein. Caesar, de bell. gall. lib. VI. und VII., cursorisch. Ranke's Chrestomathie. Prosodie und Metrik. Exercitien und Extemporalien. 5 St. w. Dielitz.

Französisch. Der prosaische Theil des Handbuchs von Büchner und Herrmann wurde cursorisch gelesen, zum Theil schriftlich übersetzt und mündlich zurückübersetzt. Anwendung des Particips, des Infinitivs und der Zeiten des Indicativs. Exercitien und Extemporalien. Declamations- und Redeübungen. 4 St. w. Herrmann.

Englisch. Wiederholung des etymologischen Theils der Grammatik und Erklärung der Hauptregeln der Syntax. Mündliche und schriftliche Uebungen. Lectüre des Elementarbuchs des Lehrers. 2 St. w. Schneider.

Zeichnen. Im Sommer Ornamente und Thiere nach Gypsabgüssen. Im Winter: Baumstudien nach Hubert und Tempeltei. Unterricht in der Schattenconstruction und im Zeichnen der Durchschnitte. Zur häuslichen Uebung wurden im Sommer Gebäude und Landschaften, im Winter Durchschnitte von wirklichen Gegenständen gezeichnet. 2 St. w. Schönau.

Unter-Secunda.

Ordinarien Coet. I. Oberlehrer Heller.
Coet. 2. Oberlehrer Voigt.

Religion. Geschichte der christlichen Kirche, insbesondere der drei ersten Jahrhunderte und der Reformation. 2 St. w. Coet. I. mit Prima comb. Spilleke. Coet. II. Predigtamtscandidat Münchhoff.

Mathematik. a) Geometrie. Die Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren und vom Kreise, nach Huberts Lehrbuch. 2 St. w. b) Algebra. Operationen mit vielgliedrigen Ausdrücken und Umformungen, Gleichungen des ersten Grades mit einer und mehrerer Unbekannten. 2 St. w. Coet. I. Schellbach. Coet. II. Huberdt.

Physik. Die allgemeinen Eigenschaften der Körper i. S., die wichtigsten Erscheinungen der Wärme und des Lichts im Winter. 2 St. w. Coet. I. und II. Heller.

Chemie. Die nicht metallischen Elemente und deren Verbindungen. 2 St. w. Coet. I. und II. Lindes.

Naturgeschichte. Im Sommer: Nach einer allgemeinen Einleitung, Demonstrationen lebender Pflanzen und Erläuterung des Systems von Linnée. Coet. I. und von Jussieu Coet. II. 2 St. w. Daneben Excursionen. Im Winter: Säugethiere Coet. I. Vögel Coet. II. 2 St. w. Schulz.

Geschichte. Alte und mittlere Geschichte nach Dielitz Grundriß der Weltgeschichte. 2 St. w. Coet. I. Dielitz. Coet. II. Voigt.

Geographie. Wiederholung der Geographie von Asien und Europa. 2 St. w. Coet. I. Dielitz. Alte Geographie und Deutschland. Coet. II. Voigt.

Deutsch. Satzlehre mit besonderer Berücksichtigung der Rection. Lektüre: Wackernagels Gedichtsammlung, (Coet. II.), Tell und Wallenstein (Coet. I.), aus welchen Stellen auswendig gelernt wurden. Freie Vorträge. Deklamation. Aufsätze. 3 St. w. Coet. I. Heller. Coet. II. Voigt.

Latein. Caesar, de bell. Gall. lib. IV. und V. Auswendig gelernt wurde daneben VI. 21—25., im Sommer: 14—15., im Winter: Coet I. lib. V. Auswendig gelernt wurden Stellen aus I. IV. und V. Coet. II. — Die Lehre von den Casus, Modi und Participia, mit mündlicher Einübung von Dr. Schulz. Aufgaben. Extemporalien und Exercitien. 5 St. w. Coet. I. Heller. Coet. II. Voigt.

Französisch. Der prosaische Theil des Handbuchs von Herrmann und Büchner; einige Abschnitte wurden cursorisch, andere statarisch gelesen. Dabei wurden die Regeln der Syntax besprochen. Exercitien und Extemporalien allwöchentlich abwechselnd. 4 St. w. Coet. I. u. II. Lehrer Hoffmann.

Englisch. Aussprache, Formlehre, mündliche und schriftliche Uebungen im einfachen Satz. Gelesen wurden mehrere Erzählungen aus dem Elementarbuche des Lehrers. 2 St. w. Coet. I. u. II. Schneider.

Zeichnen. Blumen und Arabesken nach Gypsabgüssen. Schattenlehre und Ausführung

des Schattens an Blumen und Thieren. Ornamente. Zur häuslichen Uebung wurden Gebäude, Landschaften, Geräthschaften in ihren Umrissen nach der Natur gezeichnet. 2 St. w. Coet. I. u. II. Schönau.

Ober-Tertia.

Ordinarien Coet. I. Oberlehrer Dr. Spilleke.
Coet. II. Oberlehrer Fischer.

Religion. Im Sommer: Die Leidensgeschichte Jesu. Im Winter: Erklärung des Evangeliums des Matthäus. Auswendiglernen von Kirchenliedern und Bibelsprüchen. 2 St. w. Coet. I. Spilleke. Coet. II. Münchhoff.

Mathematik. a) Geometrie. Die Lehre vom Parallelogramm und vom Flächeninhalt geradliniger Figuren, nach Huberdts Lehrbuch. — Aufgaben aus diesem Gebiet. — 3 St. b) Algebra. Die Hauptgesetze der ersten sechs Operationen. 2 St. c) Rechnen. Die Gesellschafts- und Mischungsrechnung. 1 St. Zus. 6 St. Coet. I. Schellbach. Coet. II. Fischer.

Naturgeschichte. Im Sommer: Allgemeine Einleitung in die Botanik, Demonstrationen lebender phanerogamischer Pflanzen zur Einübung der Terminologie, Erläuterung und Einübung des linnéischen Systems, Excursionen. Im Winter: Allgemeine Einleitung in die Zoologie, Naturgeschichte des menschlichen Körpers und eines Theiles der Säugethiere. 2 St. w. Coet. I. u. II. Schulz.

Geschichte. Alte und mittlere Geschichte, nach Dielitz' Grundriß der Weltgeschichte. 2 St. w. Coet. I. Spilleke. Coet. II. Voigt

Geographie. Alte Geographie und Geographie von Europa, insbesondere von Deutschland. Versuche im Kartenzeichnen. 2 St. w. Coet. I. Spilleke. Coet. II. Voigt.

Deutsch. Freie Ausarbeitungen; Uebungen im Lesen und Vortrage. Die Lehre von der Rektion der Zeitwörter und Repetition der Satzlehre. 4 St. w. Coet. I. Spilleke. Coet. II. Fischer.

Latein. Cornelius Nepos. Im Sommer: De regibus, Hamilcar und Hannibal. Im Winter: Miltiades, Themistocles und Aristides. Befestigung der Formlehre. Einübung der wichtigsten syntaktischen Regeln nach O. Schulz' Aufgaben. Exercitien und Extemporalien. 6 St. w. Coet. I. Dr. Spilleke. Coet. II. Oberl. Fischer.

Französisch. Repetition der Etymologie und allgemeine Uebersicht der syntaktischen Regeln, mit mündlichen und schriftlichen Uebungen. Lektüre von Paul et Virginie. Deklamations- und Sprechübungen. 4 St. w. Coet. I. und II. Herrmann.

Zeichnen. Naturzeichnen, nach bogenlinigen Körpern. Abth. 1. Fortsetzung des Zeichnens nach geradlinigen geometrischen Körpern. Unterricht in der Schattenlehre und Ausführung des Schattens an einfachen Körpern. Abth. 2. Zur häuslichen Uebung wurden Geräthschaften, auch Häusergruppen nach der Natur gezeichnet. 2 St. w. Coet. I. und II. Schönau.

Unter-Tertia.

Ordinarien Coet. I. Oberlehrer Jacoby.
Coet. II. Lehrer Schneider.

Religion. Im Sommer: Biblische Geschichte des Alten Testamentes. Im Winter: Er-

klärung der Apostelgeschichte. Auswendiglernen passender Liederverse und Bibelsprüche. Coet. I. u. II. Münchhoff.

Mathematik. a) Geometrie. Die Lehre von der Congruenz der Dreiecke und den Transversalen in denselben. Die Elementar-Sätze über Linien und Winkel im Kreise. 3 St. w. Coet. I. Jacoby. Coet. II. Schellbach.

b) Rechnen. Einfache und zusammengesetzte Regel de tri, Zinsrechnung, Kettenrechnung, Gesellschaftsrechnung, Lehre von den Decimalbrüchen. 3 St. w. Coet. I. Jacoby. Coet. II. Dr. Lottner (Schellbach).

Naturgeschichte. Im Sommer: Botanische Demonstrationen und das Linnéische Pflanzensystem. Im Winter: Die Vögel nach Schulz' Lesebuch. 2 St. w. Coet. I. Jacoby. Coet. II. Lehrer Schnell.

Geschichte. Uebersicht der deutschen und der brandenburgisch-preußischen Geschichte. 2 St. w. Coet. I. Dielitz. Coet. II. Schneider.

Geographie. Die Geographie von Deutschland. 1 St. w. Coet. I. Dielitz. Coet. II. Schneider.

Deutsch. Wiederholung der Lehre von dem einfachen Satz. Der zusammengesetzte Satz, an Beispielen aus dem Lesebuche erläutert. Lese- und Declamationsübungen. Aufsätze, meist Nachbildungen, und freie Themata. 3 St. w. Coet. I. Jacoby. Coet. II. Schneider.

Latein. Etymologie nach O. Schulz lat. Grammatik und die einfachsten syntactischen Regeln nach dessen Aufgaben zum Uebersetzen, Cursus 1 bis Regel 13., wöchentlich 2 St. Lectüre des Phädrus, 3 St. Extemporalien und Exercitien. 1 St. Zusammen 6 St. w. Coet. I. Oberlehrer Böhm. Coet. II. Cand. Zelle (Schneider).

Französisch. Tableau de la première croisade Buch I. und einige Anekdoten aus dem Anhang der Grammatik. — Beendigung der Formenlehre, besonders Einübung der unregelmäßigen Zeitwörter, der Verbes pronominaux; mündliche Uebersetzung der darauf bezüglichen Uebungsstücke in Herrmann's Grammatik. Exercitien und Extemporalien. 4 St. w. Coet. I. Herrmann. Coet. II. Heller.

Zeichnen. Erster Theil des Naturzeichnens nach gradlinigen geometrischen Körpern. Unterricht in der Schattenlehre und Ausführung des Schattens der ebenen Flächen. Zu den häuslichen Uebungen werden einfache Gegenstände als Hausgeräth und dergleichen nach der Natur in ihren Umrissen gezeichnet 2 St. Coet. I. u. II. Schönau.

Schreiben. Schnell- und Tactschreiben. Uebungen nach des Lehrers Leitfaden. Zu häuslichen Uebungen wurden Quittungen, Rechnungen und ähnliche ins Geschäftsleben eingreifende Gegenstände gewählt. Coet. I. und II. Lehrer Meyer.

Ober-Quarta.

Ordinarien Coet. I. Lehrer Wohlthat.
Coet. II. Lehrer Dr. Bloch.

Religion. Ausgewählte Erzählungen aus dem N. T., besonders die Gleichnißreden Jesu nebst entsprechenden Liedern. 2 St. w. Coet. I. Münchhoff. Coet. II. Bloch.

Mathematik. a) Geometrie. Formlehre. Elemente der Planimetrie bis zur Congruenz

der Dreiecke (incl.). 3 St. b) Rechnen. Wiederholung der Brüche, Regel-de-tri, einfache Zinsrechnung, Bruttorechnung, zusammengesetzte Regula-de-tri. 3 St. w. Coet. I. Wohlthat. Coet. II. Jacoby.

Naturgeschichte. Die Säugethiere nach Schulz' Lehrbuch. 2 St. w. Coet. I. Jacoby. Coet. II. Schnell.

Geographie. Wiederholung des Cursus von Unter-Quarta. Die vertikale Dimension der Erde nach dem 2ten Cursus von Voigt's geographischem Leitfaden. 2 St. w. Coet. I. Voigt. Coet. II. Wohlthat.

Deutsch. a) Grammatik. Wiederholung; weitere Einübung der Präpositionen, die Lehre vom vielfach erweiterten Satze. Die Grammatik wurde besonders bei der Zergliederung der Lesestücke eingeübt. b) Lehr- und Deklamationsübungen, c) Dictate. d) Aufsätze (Reproduction) und Briefe. 4 St. w. Coet. I. Wohlthat. Coet. II. Bloch.

Latein. Wiederholung und weitere Einübung der Formenlehre, besonders der Declinationen, Pronomina, der Conjugationen, der Deponentia und einiger Anomala. Aus dem Tirocinium wurden Stück 42—86 und Fabel 1—8 übersetzt, letztere auch gelernt. Wöchentl. ein Extemporale. 6 St. w. Coet. I. Wohlthat. Coet. II. Bloch.

Französisch. Wiederholung und weitere Einübung der Formenlehre, besonders des Pronoms, des Adjectivs, der 4 regelmäßigen Conjugationen; von den unregelmäßigen Verbes wurden die am häufigsten vorkommenden gelernt. Leseübungen. Uebersetzungen von Beispielen und Erzählungen aus Herrmann's Vorübungen. Erzählung 1—20 wurden auswendig gelernt. 4 St. Coet. I. Wohlthat. Coet. II. Bloch.

Zeichnen. Nach der Natur; Entwicklung der Begriffe der geometrischen und und perspectivischen Theile der Körper. Andeutung der Schattenseite durch Linien-Schattirung. Coet. I. u. II. Maler Beselin.

Schreiben. Tactschreiben, Dictate und Vorübungen im Schnellschreiben. Die häuslichen Arbeiten waren dieselben, wie in Unter-Tertia. 2 St. Coet. I. und II. Meyer.

Unter-Quarta.

Ordinarien Coet. I. Lehrer Schnell.
Coet. II. Lehrer Wetzel.

Religion. Ausgewählte Erzählungen aus dem Neuen Testamente, meist nach dem biblischen Lehrbuche von O. Schulz. Lieder aus dem Berliner Gesangbuche und Sprüche wurden gelernt. 2 St. w. Coet. I. Schnell. Coet. II. Bloch.

Rechnen. Vorübungen zu den Brüchen; die vier Operationen mit Brüchen in reinen Zahlen und in angewandten Aufgaben. 5 St. w. Coet. I. Schnell. Coet. II. Wetzel.

Naturgeschichte. Betrachtung des äußeren Menschen; im Sommer: Beschreibung einzelner Pflanzen, im Winter: Beschreibung einzelner Säugethiere und Vögel als Vorbereitung für den systematischen Unterricht. 1 St. w. Coet. I. Schnell. Coet. II. Wetzel.

Geographie. Horizontale Dimension der Erdtheile, nach dem ersten Cursus aus Voigt's geographischem Leitfaden. 3 St. w. Coet. I. und Coet. II. Voigt.

Deutsch. Lese- und Declamirübungen. Die Lehre vom einfachen und einfach-erweiterten Satze, verbunden mit Uebungen im Zergliedern von Lehrstücken. Präpositionen. Uebungen in der

Orthographie und Anfertigen kleiner Aufsätze (Nachbildung). 4 St. w. Coet. I. Schnell. Coet. II. Wetzel.

Latein. Declination der Substantiva und Adjectiva, sowie deren Comparation; Genusregeln, die Pronomina und Numeralia und die vier Conjugationen im Activ und Passiv. Uebersetzung der Stücke 1—42 aus dem Tirocinium, mündlich und schriftlich; zum Theil auch aus der Militia, Extemporalien. 6 St. w. Coet. I. Schnell. Coet. II. Wetzel.

Französisch. Kenntniß der verschiedenen Declinationen, die Hilfszeitwörter, Anfänge des regelmäßigen Zeitwortes, des Fürwort, des Zahlwort, nebst den entsprechenden deutschen und französischen Uebungsstücken aus »Herrmann's Vorübungen.« Exercitien und die leichteren Uebersetzungsstücke ebendesselben. 4 St. w. Coet. I. Heller. Coet. II. Bloch.

Zeichnen. Gerade und schwerere bogenlinige Gegenstände, Möbel, Häuser und Zimmer-Ansichten nach Vorlegeblättern. 2 St. w. Coet. I. und Coet. II. Beselin.

Schreiben. Wiederholung des in Quinta A. der Vorschule Durchgenommenen. Dictatübungen nach dem Tacte. Ziffernschreiben. Zu den häuslichen Arbeiten wurden die einzeiligen Uebungshefte des Lehrers benutzt. 3 St. w. Coet. I. und Coet II. Meyer.

---

2. Vorschule.

Erste Klasse. (Quinta A.)

Ordinarius Oberlehrer Ernst.

Religion. Wiederholung des in den vorhergehenden Klassen Durchgenommenen. Erklärung der Feste. Gelernt wurden Stellen aus der Bibel und Lieder aus dem Gesangbuche. 2 St. w. Lehrer Hermes.

Geographie und Naturgeschichte. Kenntniß der Erde nach ihren Ländern, den wichtigsten Gebirgen und Flüssen, Meerbusen Land- und Meerengen: speciellere Kenntniß von Europa. Die Schüler wurden auch mit den charakteristischen Thieren und Pflanzen einzelner Erdtheile bekannt gemacht. 3 St. w. Ernst.

Rechnen. Die Multiplikation und Division mit benannten ganzen Zahlen. Anwendung der vier einfachen Rechnungsarten mit benannten ganzen Zahlen in Aufgaben aus der Regeldetri und in zusammengesetzten Beispielen aus dem Leben. 5 St. w. Ernst.

Geometrische Formenlehre. Kenntniß der wichtigsten geometrischen Körper nach ihren besonderen Eigenschaften, und Vergleichung derselben nach ihren übereinstimmenden und verschiedenen Merkmalen. 1 St. w. Ernst.

Deutsch. a) Lesen. Einübung der schwierigeren Lesestücke aus dem Berlinischen Lesebuch. Deklamationsübungen. b) Grammatik und Orthographie. Wiederholung der bisher vorgekom-

menen Wörterklassen; weitere Einübung der Präpositionen und der noch übrigen Wörterklassen; Kenntniß des einfachen Satzes, begleitet von angemessenen Dictaten. Zusammen 7 St. w. Ernst.

Französisch. Lesen. Die variabeln Redetheile: Substantiv, das Nothwendige vom Adjectiv, die verbes auxil. in den vier Formen, die Pronomina bis incl. demonst. die Zahlwörter. Mündliches und schriftliches Uebersetzen aus dem Französischen und umgekehrt. 6 St. w. Lehrer Hensel.

Latein. Die erste und zweite Declination, das Verbum esse, das Activum der ersten Conjugation. Aus dem Tirocinium wurden die ersten 10 Stücke übersetzt. 2 St. w. Lehrer Hermes.

Schreiben. Wiederholende Uebung der Current- und Cursiv-Schrift nach des Lehrers Leitfaden. Kleine Dictate nach dem Tacte. 4 St. w. Meyer.

Zeichnen. Fortsetzung der Uebung der vorhergehenden Stufe. Schwierigere Formenverbindungen geradliniger Figuren. 1 St. w. Beselin.

Zweite Klasse. (Quinta B.)

Ordinarius Lehrer Hermes.

Religion. Wiederholung. Geschichte der Reiche Juda und Israel. Einiges aus den Propheten Jesaias und Jeremias. Erklärung der christlichen Feste. Gelernt wurden Sprüche und Lieder und die vier ersten Gebote. 2 St. w. Hermes.

Geographie und Naturgeschichte. Wiederholung. Vertheilung des Hoch- und Tieflandes und die wichtigsten Flüsse in jedem Erdtheile. Die wichtigsten Meere, Meerbusen u. s. w. der Erde. Beschreibung einiger charakteristischer Producte. 3 St. w. Derselbe.

Rechnen. Wiederholung, namentlich die der Division im unbegrenzten Zahlenraume. Das Resolviren und Reduciren. Die Addition, Subtraction und Multiplication mit benannten ganzen Zahlen. Das Einmaleins. 5 St. w. Derselbe.

Deutsch. a) Lesen. Einübung schwieriger Lesestücke aus dem Berlinischen Lesebuch. b) Grammatik. Wiederholung; die Declination, Comparation und Conjugation mit ihren Flexionsmitteln. Die Fürwörter. Die Verhältnißwörter des 3ten und 4ten Falls. c) Orthographie. Diktate, Fehlerverbesserungen, Abschriften. 7 St. w. Derselbe.

Französisch. Lesen, Vocabellernen, Declination der Substantive, die verb. auxil., die Grundzahlwörter. Uebung im Uebersetzen aus Herrmanns kleiner Sprachlehre. 6 St. w. Hensel.

Schreiben. Das kleine und große deutsche und englische Alphabet. Wörter und Sätze in beiden Alphabeten nach Meyer's Vorschule. 4 St. w. Lehrer Wieprecht.

Geometrische Formenlehre. Die Elemente. Besprechung des Würfels, des Prisma, der Pyramide, des Kegels und Cylinders. Uebungen im Zeichnen der Körpernetze. 2 St. w. Wieprecht.

Zeichnen. Die Elemente des Linear-Zeichnens verbunden mit der Formenlehre. 1 St. w. Beselin.

Dritte Klasse. (Sexta A.)

Ordinarius Lehrer Wieprecht.

Religion. Wiederholung. Geschichte Sauls, Davids und Salomos. Erlernung von

Liedern und Sprüchen aus der Bibel. Erklärung der christlichen Feste. 2 St. w. Im Sommer Lehrer Elwitz, im Winter Wieprecht.

Geographie. Heimathskunde. Erklärung geographischer Vorbegriffe. Uebersicht der Land- und Wassertheilung auf der Erde. Allgemeines über die Lebensweise der Menschen und Thiere; Einiges über Naturproducte. Die Länder Europas. 3 St. w. Hensel.

Rechnen. Wiederholung des Zu- und Abzählens. Weiterführung des Vervielfachens. Das Theilen. Leichte Uebungen im Resolviren. 6 St. w. Wieprecht.

Deutsch. a) Lesen. Ausgewählte Stücke aus dem Berlinischen Lesebuche wurden gelesen und besprochen, auch einige derselben gelernt. b) Grammatik. Zerlegung des Satzes in Wörter, der Wörter in Sylben und Laute. Arten der Laute und Sylben. Wiederholung des Ding- Geschlechts- und Eigenschaftswortes. Deklination und Comparation. Conjugation der Hülfszeitwörter. c) Orthographie. Die einfachen ortographischen Regeln wurden in Diktaten eingeübt. Die Endmitlaute. Die Abstammung. Die häuslichen Arbeiten bestanden abwechselnd in Abschriften von Diktaten und in grammatischen Arbeiten. 8 St. w. Wieprecht.

Schreiben. Das kleine und große deutsche und englische Alphabet. Wörter und Sätze in beiden Alphabeten. Benutzt wurde hierbei und zugleich auch zu den häuslichen Arbeiten die vom Lehrer herausgegebene Vorschule. 6 St. w. Meyer.

Zeichnen. Betrachtung der geraden Linie nach ihren drei Richtungen. Das Zeichnen und Theilen derselben, nebst Uebung der abgesetzten und punktirten Linie. 1 St. w. Beselin.

Vierte Klasse. (Sexta B.)

Ordinarius Lehrer Elwitz.

Religion. Wiederholung. Geschichte Mosis. Einnahme des gelobten Landes. Josua. Die Geschichte der Richter: Gideon, Simson, Eli und Samuel. Gebete, Sprüche und Gebote ohne Erklärung und Lieder aus dem Gesangbuche wurden gelernt. Erklärung der christlichen Feste. 2 St. w. Elwitz.

Rechnen. Addition, Subtraction und Multiplication mit unbenannten Zahlen, mündlich im Zahlenkreise von 100 — 1000, schriftlich im unbegrenzten Zahlenkreise. Vorübungen zur Division. 6 St. w. Elwitz.

Deutsch. a) Lesen. Die leichten Lesestücke aus dem Berlinischen Lesebuche wurden gelesen mit besonderer Beachtung der Laut- und Tonrichtigkeit. 6. St. b) Grammatik. Zerlegung des Satzes in Wörter, der Wörter in Silben und Laute. Arten der Laute. Kenntniß des Ding-, Geschlechts- und Eigenschaftswortes. 2 St. c) Orthographie. Abschriften aus dem Lesebuche Dictate zur Einübung der einfachsten Regeln der Orthographie. 2 St. d) Sprachübungen. Besprechung von Gedichten und Bildertafeln. Erlernung von Gedichten. Vorträge geschöpft aus der Privatlectüre. 2 Stunden. Zusammen 12 St. w. Lehrer Elwitz.

Schreiben. Die kleinen und großen Cursiv-Buchstaben in Sylben, Wörtern und Sätzen. Wiederholung der Currentschrift. Häusliche Uebungen. 6 St. w. Lehrer Hebold.

Fünfte Klasse. (Septima A.)

Ordinarius Lehrer Hebold.

Religion. Geschichte des alten Testaments von der Schöpfung bis zum Tode Josephs

Erklärung der christlichen Feste und Bekanntmachung mit den Fest-Evangelien. Unterredungen über auswendig zu lernende Bibelsprüche, Lieder und Gebete. 2 St. Hebold.

Rechnen. Wiederholung und weitere Einübung der mündlichen Addition und Subtraction im Zahlenkreise von 1 — 100. Einübung des Einmaleins und Vorübungen zur Division. Lösung von angewandten Aufgaben. Orientirung im Zahlenkreise von 1 — 1000. Numeriren; schriftliche Addition und Subtraction in diesem Zahlenkreise. 6 St. w. Hebold.

Deutsch. a) Lesen. Fernere Uebung an größeren Lesestücken in deutscher und lateinischer Druckschrift. b) Orthographie. Abschriften aus dem Lesebuche; Zergliederung kurzer Abschnitte aus dem Lesebuche in Wörter, Sylben und Laute; und erste Belehrung über diese Sprachelemente. Uebung im Buchstabiren; Kenntniß der Interpunktionszeichen; leichte Dictate. c) Sprachübungen. Uebung im Ausdruck eigner Gedanken durch Besprechung einzelner Oertlichkeiten, Natur- und Kunstprodukte und bekannter Lebenskreise der Heimath und Benutzung der Bildertafeln. Erläuterung prosaischer und poetischer Sprachstücke; Wiedererzählen oder Memoriren derselben durch Vorsprechen. Zusammen 10 St. w. Hebold.

Schreiben. Uebungen des kleinen und großen Alphabets der deutschen Currentschrift in Sylben, Wörtern und ganzen Sätzen, desgleichen häusliche Uebung. 8 St. w. Lehrer Matthes.

Sechste Klasse. (Septima B.)

Ordinarius Lehrer Laubert.

Religion. Ausgewählte Geschichten, welche dem 1. Buch Mosis entnommen sind, oder auf die laufenden Feste Bezug haben. Erlernen kurzer und faßlicher Bibelsprüche, Gebete und Liederverse. 2 St. w. Lehrer Laubert.

Rechnen. Möglichst vollständige Kenntniß des Zahlenkreises von 1—100. Lösung hierher gehöriger Aufgaben aus der Addition und Subtraction theils mündlich, theils durch schriftliches Operiren mit den Ziffern. 6 St. w. Laubert.

Lesen und Schreiben. Kenntniß und Einübung aller, bis nach Zerlegung der Wörter gefundenen Laute darstellenden, deutschen Zeichen in der Schrift und im Druck. Lesen von Wörtern, Sätzen und zusammenhängenden Lesestücken. Hiermit verbundenes, gleichzeitig fortschreitendes Schreiben von Wörtern und Sätzen nach Vorschriften, nach der Druckschrift und dem Gehör. 14 St. Laubert.

Sprechübungen. Betrachtung von Gegenständen für sich und in ihrem auf der Bildertafel dargestellten Verhältniß zu einander. Besprechung und Erlernen kleiner Erzählungen und Gedichte. 2 St. Laubert.

Gesang-Unterricht.

Erste Gesangklasse, aus den Schülern der obern und einzelnen der mittleren Klassen bestehend in drei Abtheilungen. Es wurden eingeübt: Magnificat von Durante, der 95. Psalm von Grell, Motetten von Grell, und B. Klein, der 84. Psalm von Engel, die Glocke von Romberg, und 4stimmige Choräle. 6 St. Fischer.

Der Gesangunterricht ist in Unterquarta, Oberquarta und Untertertia Klassenunterricht.

In Unterquarta wurden Uebungen im Tonbilden und Treffen angestellt, Choräle einstimmig und Lieder ein- und zweistimmig gesungen. Die Lehrmittel waren: die Choräle von Vistorius umgearbeitet, und vermehrt von Fischer, das Liederbuch von Vistorius und der Liederkranz von Erk und Greef (1tes Heft). In theoretischer Hinsicht wurden die Noten, der Unterschied der Tonarten im Allgemeinen, wie der einzelnen Dur-Tonarten (bis zu 4 Bezeichnungen) gelehrt.

In Oberquarta wurden die Uebungen im Tonbilden und Treffen fortgesetzt, die Choräle und Lieder dreistimmig gesungen. Die Lehrmittel waren: die Choräle von Vistorius umgearbeitet, und vermehrt von Fischer, der Liederkranz von Erk (2tes Heft). In theoretischer Hinsicht wurde die Lehre von den Noten und den Tonarten erweitert.

In Untertertia wurden die Uebungen im Tonbilden und Treffen fortgesetzt, die Choräle dreistimmig und die Lieder drei- und vierstimmig gesungen. Die Lehrmittel waren: die Choräle von Vistorius, umgearbeitet und vermehrt von Fischer, der Liederkranz von Erk (2tes Heft) und die Gesänge von Schauer. In theoretischer Hinsicht wurde die Kenntniß der Noten und der Tonarten erweitert.

Turn-Unterricht.

Der Turn-Unterricht ward auch in diesem Jahre, im Sommer auf dem Turnplatze in der Hasenhaide, im Winter in dem früher Eiselen'schen Lokale fortgesetzt und durch Turnspiele und Turnfahrten belebt; auch ein regelmäßiger Fecht-Unterricht für ältere Schüler hinzugefügt. Zu den Lehrern, welche die Leitung desselben übernommen haben, dem Turnlehrer Fedders und dem Professor Walter, trat für die Realschule der Oberlehrer Spilleke, welcher sich mit Eifer und Hingebung der Sache gewidmet hat. Dessungeachtet haben die Erfolge den Bemühungen nicht entsprochen. Mit dem beginnenden Sommer-Semester hoffen wir auf regere Theilnahme und günstigere Resultate.

B. Chronik.

Der Rückblick auf das verflossene Jahr veranlaßt uns zu dem innigsten Danke gegen Gott, der die großen Gefahren, welche auch unsern Anstalten drohten, gnädig abgewendet und uns vor wesentlichen Nachtheilen und Störungen behütet hat. Schon war in der Nacht vom 18. zum 19. März die Hand der Zerstörung an die inneren Räume der Realschule gelegt; glücklicherweise aber waren es nur alte und wenig brauchbare Bänke und Stühle, welche man aus den Fenstern hinabstürzte und zu Barrikaden verwendete. Die Schulhäuser der Elisabeth- und Realschule waren damals zu festen Plätzen ausersehen, von wo ein Kampf gegen das Militair, wenn es bis hierher vordränge, organisirt werden sollte; die Eingangsthür der Elisabethschule war schon verschlossen und von innen gegen das Eindringen der Soldaten geschützt: aber der Kampf ward vermieden und nach kurzer Unterbrechung konnte der Unterricht ungestört fortgesetzt werden. Indeß verließen seit jenen Tagen aus Furcht vor ähnlichen Scenen nicht nur im Anfange, sondern auch während des ganzen Verlaufs des Sommers viele Eltern die Stadt und nahmen ihre Kinder mit; dessungeachtet blieb mit Ausnahme der von unsern Hohen Behörden gewollten Verminderung der Schülerzahl im Ganzen dieselbe Anfüllung der

Klassen unverändert. Und wenn auch durch die beständigen Unruhen in der Stadt und durch die Furcht vor denselben nicht selten mehrere Schüler vom Schulbesuche abgehalten oder wir selbst zum Aussetzen der Lehrstunden genöthigt wurden, oder auch in den Schullokalen eine Stimmung herrschte, welche dem Fortgange des Unterrichts hemmend entgegentrat, so ist doch im Allgemeinen der Zweck der Anstalten möglichst gewahrt und erreicht worden. Im Winter hat dagegen der Belagerungszustand viele Unannehmlichkeiten gehoben und Lehrern und Schülern die ruhige Fortführung ihres gemeinsamen Werkes bedeutend erleichtert.

Mitten in diese unruhige Zeit fiel ein Werk, dessen Vollendung seit der Gründung der Anstalten ein Gegenstand der dringendsten Wünsche aller Lehrer gewesen war, der Bau eines gemeinsamen Versammlungssaales. Ungeachtet der eingetretenen größeren Kosten der Neubauten und der allgemeinen drückenden Verhältnisse ward das seit einigen Jahren schon vorbereitete Unternehmen im April begonnen, und bald in feierlicher Weise der Grundstein gelegt. Unter Fürsorge des Herrn Baurath Stein, welcher sich der Mitwirkung des Bauführers und Lieutenants a. D. Herrn v. Rosenberger für die specielle Leitung des Baues bediente, ward das Ganze im Laufe des Jahres schnell und glücklich seinem Ende zugeführt. Es ist uns daher vergönnt, bereits am 31sten d. M. 11 Uhr Vormittags, den Saal einzuweihen, und den ersten Schulakt der Entlassung der Abiturienten des Gymnasiums und der Realschule darin vorzunehmen, um sodann das neue Gebäude dem weiteren Gebrauch der Anstalt zu übergeben.

In denselben Tagen aber, in welchen der Bau begann, trat auch ein anderes Ereigniß ein, welches wir früher als ein sehr glückliches begrüßt hätten, jetzt aber leider um der Ungunst der Zeiten willen nur mit Besorgniß eintreten sehen konnten. Worüber ich im Jahre 1845 im Jahresbericht der Realschule S. 58. den freudigsten Bericht erstattete, der Ankauf des in der Friedrichsstraße No. 208. belegenen Hauses ist jetzt vollzogen. Madam Engel hat es uns bald nach den Märzereignissen, und zwar in einer so schonenden Weise übergeben, welche uns zur Dankbarkeit auffordert: wir sind aber dadurch für den Augenblick in die größte Verlegenheit gesetzt worden, und völlig außer Stande, die gewonnenen Räume sofort für unsere Zwecke zu benutzen. Wir blicken daher mit unsern Wünschen und Hoffnungen auf die Hohen Unterrichtsbehörden, welche hier allein nachhaltig helfen können.

Im Lehrercollegium der Realschule ist im Laufe des Jahres nur folgende Veränderung vorgegangen. Der Lehrer Herr Wetzel ging Ostern 1848 aus der Vorschule an die Realschule und das Friedrich-Wilhelms-Gymnasium über: und an seiner Stelle trat Herr Laubert in die Vorschule ein. Als Schulamtscandidaten waren die Herren Zelle und Dr. Lottner thätig, und haben uns bei eintretenden Vacanzen kräftig unterstützt. Als Prof. Dielitz eine Zeit lang als Abgeordneter in die Nationalversammlung eingetreten war, haben ihn die Herren Schulamtscandidaten Dr. Foß, Wilsky, Badstübner, und Zelle in erfreulicher und erfolgreicher Weise vertreten. Der Abgang des Prof. Dielitz, welcher zum Director der höheren Bürgerschule in der Schießgasse ernannt worden ist, hat sich zum Vortheil der Realschule bisher noch verzögert.

Zu den üblichen Schulfeierlichkeiten kam im Laufe des vorigen Jahres ein seltenes Fest, die silberne Hochzeit Ihrer Majestäten des Königs und der Königin, welches in der Königl. Elisabethschule mit inniger Theilnahme gefeiert wurde. Den ganzen Sommer über hatten die Schülerinnen der 1sten Classe mit hingebender Liebe und seltener Treue und Ausdauer einen Teppich gearbeitet, wozu das Muster von dem Zeichenlehrer des Gymnasiums, Herrn Hof-Wappenmaler Asmus, mit freundlicher Bereitwilligkeit entworfen und mit einigen Abänderungen in des Herrn C. W. Willich Stickmusterverlagshandlung durch den Maler Herrn Kunstmann ausgeführt worden war. Nachdem wir denselben am Sonntag vorher in der Schule ausgestellt hatten, wurde er von einer Deputation, welche am Tage vor dem Feste vorgelassen zu werden die Ehre hatte, Ihrer Majestät der Königin übergeben, welche die geringe, aber von der innigsten Liebe für das Hohe Königspaar dargebrachte Gabe mit gewohnter Huld und Freundlichkeit aufnahm. Die Stunden in Potsdam werden allen Betheiligten unvergeßlich sein.

Endlich sei es uns vergönnt, über einige Geschenke zu berichten, welche der Realschule zu Theil geworden sind. In der letzten Schulschrift für das Gymnasium haben wir bereits der werthvollen Gabe gedacht, welche wir der Liberalität des bereits verewigten Dr. Homann in Oranienburg, und der freundlichen Mitwirkung des Assistenten Herrn Amerlan verdanken. Wir werden das Herbarium jenes verdienten Mannes in Ehren halten.

Außerdem hat uns ein ehemaliger Zögling der Realschule, gegenwärtig Dirigent eines Zinkwalzwerkes bei Gleiwitz Herr Kayser, eine sehr instruktive Sammlung von Fossilien, wie sie zur Eisen- und Zink-Gewinnung in Schlesien verwendet werden, in Verbindung mit den bei ihrer Verarbeitung sich ergebenden Hüttenprodukten zum Geschenk gemacht, um, wie er in seinem Briefe sich aus-

spricht: Der Anstalt der er seine erste und gründliche Bildung verdankt, ein Zeichen dankbarer Anerkennung zu geben. Die genannten Gegenstände sind den mineralogischen und chemischen Sammlungen eingereiht worden, und werden beim Unterrichte in den betreffenden Disciplinen benutzt. Möchte das Beispiel des wackern Geschenkgebers, dem wir hiermit verbindlichst danken, recht viele Nachahmer finden, da es der Realschule noch sehr an ähnlichen Mitteln zur Beförderung des Unterrichts fehlt.

C. Statistische Nachrichten.

Am Schlusse des vorigen Schuljahres wurden in 40 Klassen 1984 Schüler und Schülerinnen in den vereinigten Anstalten unterrichtet, von denen sich 491 im Friedrich-Wilhelms-Gymnasium, 624 in der Realschule, 360 in der Vorschule, 509 in der Elisabethschule befanden. Im verflossenen Wintersemester waren 1. im Friedrich-Wilhelms-Gymnasium in Ober-Prima 28, Unter-Prima 30, Ober-Secunda 45, Unter-Secunda 50, Ober-Tertia 61, Unter-Tertia Coet. I. 36, Coet. II. 34, Quarta Coet. I. 33, Coet. II. 42, Quinta 63, Sexta 51, zusammen 473. In der Realschule besuchten Prima 26, Ober-Secunda 42, Unter-Secunda Coet. I. 38, Coet. II. 38, Ober-Tertia Coet. I. 51, Coet. II. 57, Unter-Tertia Coet. I. 59, Coet. II. 50, Ober-Quarta Coet. I. 55, Coet. II. 57, Unter-Quarta Coet. I. 48, Coet. II. 48, zusammen 566. In der Vorschule waren in der ersten Klasse (V A.) 58, in der zweiten (V B.) 66, in der dritten (VI A.) 67, in der vierten (VI B.) 59, in der fünften (VII A.) 40, in der sechsten (VII B.) 50, zusammen 340. In der Elisabethschule waren in I. 40, II. 37, III. 33, IV A. 42, IV B. 50, V A. 50, V B. 56, VI A. 52, VI B. 41, VII A. 40, VII B. 23, zusammen 464, und in sämmtlichen Anstalten 1843.

Aus der Realschule schieden nach beendetem Examen mit dem Zeugniß der Reife folgende Schüler: a) Michaelis 1848: 1. Wilhelm Badstübner, aus Berlin gebürtig, 16 Jahr alt, 4½ J. auf der Anstalt, 1 J. in Prima, zum Beamtenstand. 2. Franz Coulon, aus Potsdam, 18¾ J. alt, 4 J. auf der Anstalt, 1 J. in Prima, zum Forstwesen. 3. Julius Clages, aus Potsdam, 18 J. alt, 6½ J. auf der Anstalt, 1½ J. in Prima, zum Beamtenstand. 4. Paul Hanstein, aus Potsdam, 19 J. alt, 3½ J. in der Anstalt, 1½ J. in Prima, wird Maschinenbauer. 5. Franz Piepersberg, aus Ehrenbreitstein, 17 J. alt, 3 Jahr in der Anstalt, 1½ J. in Prima, zum Forstfach. 6. Rud. Pfeiffer, aus Berlin, 19 J. alt, 4 J. in der Anstalt, 1½ J. in Prima, zum Forstfach. 7. Bernh. Richter, aus dem Stift zum Heiligengrabe, 19 J. alt, 5 J. in der Anstalt, 1 J. in Prima. 8. Waldemar Schäffer, aus Berlin, 20 J. alt, 10 J. in der Anstalt, 1½ J. in Prima. 9. Theodor Rähmel, aus Berlin, 17½ Jahr alt, 8½ Jahr in der Anstalt, 1 Jahr in Prima. 10. Friedrich Winkelmann, aus Berlin, 20 J. alt, 3½ J. in der Anstalt, 1 J. in Prima, zum Beamtenstand. b) zu Ostern 1849: 1. Alb. Johannes, aus Charlottenburg, 19 J. alt, 2½ J. in der Anstalt, 1 J. in Prima, zum Baufach. 2. Wilhelm Graßhoff, aus Berlin, 16½ J. alt, 10½ J. in der Anstalt, 1½ J. in Prima. 3. Oscar Ebers, aus Bellevue bei Berlin, 20 J. alt, 4 J. in der Anstalt, 1 J. in Prima, wird Eisenbahn-Ingenieur. 4. Wilh. Mattschaß, aus Charlottenburg, 16½ J. alt, 5 J. in der Anstalt, 1 J. in Prima. 5. Franz Platz, aus Berlin, 17 J. alt, 8 J. in der Anstalt, 1 J. in Prima, zum Forstfach. 6. Ludw. Reimer, aus Berlin, 16½ J. alt, 4 J. in der Anstalt, 1 J. in Prima. 7. Jul. Walter, aus Berlin, 18 J. alt, 6½ J. in der Anstalt, 1 J. in Prima, zum Baufach.

Von ihnen erhielten Piepersberg, Clages, Badstübner und Graßhoff das Zeugniß vorzüglich; Coulon, Rähmel, Ebers und Platz hinreichend, die Uebrigen gut bestanden.

Außerdem sind abgegangen:

I. Aus Prima der Realschule.

1. Otto Hübner, 17½ J. alt, aus Breslau gebürtig, zum Militair. 2. Martin v. Frisch, 17 J. alt, aus dem Mecklenburgischen gebürtig, zur Oekonomie. 3. Rud. König, 18½ J. alt, aus Wriezen, zum Militair. 4. Friedrich Graf v. Waldersee, 18 J. alt, aus Berlin, zum Militair.

5. Hugo v. d. Marwitz, 18 J. alt, aus Cöpin in der Neumark, zur Oekonomie. 6. August v. Voigts genannt v. König, 18 Jahr alt, aus Berlin, zur Oekonomie. 7. Hans Kunz, 16 Jahr alt, aus Berlin, wird Schiffbauer. 8. Paul Wegener, 16 J. alt, aus Wittstock, wird Kaufmann.

II. Aus Ober-Secunda.

1. Herrmann Knieſche, 16½ J. alt, aus Finſterwalde gebürtig, wird Maſchinenbauer. 2. Heinrich Schacko, 17 J. alt, aus Berlin. 3. Louis Möhr, 16½ J. alt, aus Berlin, zu demſelben Fach. 4. Alfred v. Lewinski, 16 J. alt, aus Münſter. 5. Eduard Schröder, 17½ J. alt, aus Berlin. 6. Adalbert Hoffacker, 18 Jahr alt, aus Wrietzen, ſämmtlich zum Militair. 7. Edmund v. Grävenitz, 18 J. alt, aus Berlin. 8. Julius Albrecht, 16 J. alt, aus Rüdersdorf, beide zum Seedienſt. 9. Carl Willmann, 17 J. alt, aus Berlin, wird Beamter. 10. Heinrich Brunkow, 16½ J. alt, aus Landsberg an der Warthe. 11. Julius Hoffmann, 15½ Jahr alt, aus Berlin, beide zum Handelsſtande. 12. Guſtav Maſſengier, 18 J. alt, aus Prenzlau. 13. Louis Perrin, 15 J. alt, aus Berlin, beide zum Schulfach. 14. Louis Kettner, 18 J. alt, aus dem Mecklenburgiſchen. 15. Ernſt Pfannenſtiel, 17½ J. aus Berlin. 16. Auguſt Dietrich, 17 J. alt, aus Breslau. 17. Paul Herrm. Schindowski, 15½ J. alt, aus Berlin. 18. Carl Alexis Edm. Peiſker, 18 J. alt, aus Berlin. 19. Joh. Chriſt. Ernſt Liman, 18 J. alt, aus Berlin, ſämmtlich zur Oekonomie. 20. Ludwig Hoffmann, 17½ J. alt, aus Berlin, wird Muſiker. 21. Bernh. Leonhardt, 18 J. alt, aus Berlin, wird Lehrer. 22. E. Fr. Aug. Raguſe, 14½ J. alt, aus Berlin, auf das Gymnaſium.

III. Aus Unter-Secunda.

1. Wilhelm Beltze, 16 J., aus Berlin geb. 2. Wilhelm Raſcher, 17 J., aus Berlin. 3. Herm. Wolff, 14 J., aus Berlin, 4. Aug. Otto Voges, 14½ J., aus Berlin, 5. Wilh. Urban, 16 J., aus Berlin, 6. Herrm. Friedrich, 15 J., aus Charlottenburg, 7. Guſtav Kaliſky, 17 J., aus Marienwerder, 8. Adolph Bieling, 15½ J. aus Berlin, Louis Emil Rouſſet, 15½ J., aus Neu-Ruppin. 10. Aug. Rähmel, 14½ J., aus Berlin, ſämmtlich zum Handelsſtand. 11. Adolf Athenſtädt, 16½ J., aus dem Oſtpreußiſchen, wird Apotheker. 12. Carl Timm, 17 J., aus Berlin, 13. Guſtav Böhme, 16 J., aus Oranienburg, 14. Guſtav Schulze, 18½ J., aus Berlin, 15. Valer. Albrecht Eckard, 17 J., aus Berlin, 16. Franz Wilcke, 17 J., aus Berlin, 17. Paul Carl Aug. Meyer, 16 J., aus Berlin, 18. Ernſt Böttcher, 17 J., aus Berlin, 19 u. 20 Guſt. Herrm. und Ernſt Alb. Fiſcher, aus Natzmersdorf, 21. Julius Nobbe, 17 J., aus Amt Korin, ſämmtlich zur Oekonomie. 22. Adolf Fürſtner, 15 J., aus Berlin, zur Buchhandlung. 23. Max Polenz, 15 J., aus Berlin, wird Apotheker. 24. Johannes Kühne, 16 J., aus Berlin, wird Buchbinder. 25. Oskar Schöpke, 17½ J., aus Berlin, wird Färber. 26. H. Ed. Paul Michelet, 13 J., aus Berlin, zur Handelsſchule. 27. Albr. v. Sydow, 16½ J., aus Petershagen, zum Militair. 28. Rob. v. Kalkreuth, 17½ J., aus Berlin, ebendahin. 29. Ed. Schmidt, 17 J., aus Berlin, wird Thierarzt. 30. Leop. Ed. Rumbauer, 16 J., aus Berlin und 31. Ad. Krulle, 16 J., aus Bornſtädt bei Potsdam, beide zum Seedienſt. 32. Alb. König, 19 J., aus Büſſow bei Friedeberg, 33. Eugen Ferd. Schulz, 17½ J., aus Berlin, zur Oekonomie. 34. Herrm. Rudolph 18½ J., aus Berlin, wird Lehrer. 35. Herrm. Ende, 16 J., aus Berlin, wird Kaufmann.

IV. Aus Ober-Tertia.

1. Carl Louis Eſchert, 15 J., aus Berlin. 2. Alb. Manteuffel, 15½ J., aus Berlin, wird Kaufmann. 3. Ad. Lange, 14 J., aus Berlin, wird Koch. 4. Ed. Küſter, 17 J., aus Neuſtadt in Oberſchleſien, wird Maſchinenbauer. 5. Rob. Gravenhorſt, 13 J., aus Berlin, auf das Gymnaſium in Guben. 6. Oskar Plötz, 16 J., aus Berlin, 7. Rud. Händel, 15 J., aus Berlin, beide zum Handelsſtand. 8. Herrm. Cracow, 17 J., aus Berlin, wird Maſchinenbauer. 9. Louis Schmidt, 16 J., aus Berlin. 10. Friedr. Rietzel, 15 J., aus Berlin. 11. Joh. Heinr. Breetz, 14 J., aus Berlin, wird Gürtler. 12. Alphons Wakczynski, 16 J., aus Oſtrowo, wird Maurer. 13. Herrm. Grunack, 15½ J., aus Berlin. 14. Herrm. Greiert, 16 J., aus Berlin. 15. Carl Dumont, 15 J., aus Hannover. 16. Carl Miehn, 15 J., aus Berlin. 17. Paul Nickel, 17 J., aus Fürſtenwalde.

V. Aus Unter-Tertia.

1. Herrmann Eichler. 2. Richard Markert. 3. Robert Heinemann. 4. Guſtav Jurth. 5. Fritz Krüger. 6. Guſtav Wagenitz. 7. Edmund v. Weißenborn. 8. Julius Doniges.

9. Bruno Krüger. 10. Rudolph Kahne. 11. Fritz Herrlich. 12. Herrmann Vater. 13. Wilhelm Wallroth. 14. Heinrich Friederici. 15. Otto Stubbe. 16. Georg v. Kaffka. 17. Julius Standtke. 18. Wilhelm Wuerz. 19. Philipp Michel Wilhelm Drewitz. 20. Carl Haucke. 21. Carl Neumann. 22. Emil Cornaglia. 23. Ed. Hoffmann. 24. Herrm. Rudel. 25. Reinhold Schröder. 26. Paul Wegner.

VI. Aus Ober-Quarta.

1. Carl Bock. 2. Alexander v. Mitzel. 3. Louis Willmann. 4. Carl v. Lewinski. 5. Emil Kosch. 6. Karl Rollmann. 7. August Dornbrech. 8. Herrmann Braun. 9. Paul Gärtner. 10. Friedrich Rechlin. 11. Franz Spalter. 12. Ernst Försterling. 13. Max Neuendorf. 14. Carl. Ziegelmann. 15. Clausing. 16. Paul Gärtner. 17. Franz. 18. Franzelius. 19. Köhne.

VII. Aus Unter-Quarta.

1. Otto Mehler. 2. Feodor Mehler. 3. Kretzschmer. 4. v. Borowski. 5. Glasbrenner. 6. Begas. 7. Herrmann Müller. 8. Wilhelm Müller. 9. Herrmann Grothe. 10. Hermann Nauen. 11. Carl Stolt.

VIII. Aus der Vorschule.

1. Habelmann. 2. Rechlin. 3. Simmel. 4. Köppe. 5. Kampfhenkel. 6. Singer. 7. Michaelis. 8. Starck. 9. Hartmann. 10. Woltmann. 11. v. Richthofen. 12. Reich.

Einige Schüler sind uns leider durch den Tod entrissen worden, unter denen wir die kleinen Vorschüler Hollerbach und Friedrich, den Obequartaner Kosch und den Obersecundaner Bußmann, welcher letztere auf der Jagd erschossen wurde, erwähnen. Mit inniger Theilnahme hat die Schule den großen und schmerzlichen Verlust der verehrten Eltern erfahren.

D. Oeffentliche Prüfung.

Montag, den 2ten April.

Vormittags von 8½ Uhr an

1. Unter-Quarta. Coet. II. Rechnen. Lehrer Wetzel. — Coet. I. Latein. Lehrer Schnell. Geographie. Oberlehrer Voigt.
2. Ober-Quarta. Coet. II. Französisch. Lehrer Dr. Block. — Coet. I. Deutsch. Lehrer Wohlthat. Religion. Lehrer Münchhoff.
3. Unter-Tertia. Coet. II. Latein. Lehrer Schneider. Naturgeschichte. Lehrer Schnell. — Coet. I. Geometrie. Oberlehrer Jacoby. Französisch. Professor Herrmann.

Nachmittags von 2½ Uhr an.

1. Unter-Septima. Lesen und Rechnen. Lehrer Laubert.
2. Ober-Septima. Lesen und Sprachübungen. Lehrer Hebold.
3. Unter-Sexta. Religion. Lehrer Elwitz.
4. Ober-Sexta. Rechnen und Deutsch. Lehrer Wieprecht.
5. Unter-Quinta. Geographie und Naturgeschichte. Lehrer Hermes.
6. Ober-Quinta. Französisch. Lehrer Hensel. Geometrische Formlehre. Oberlehrer Ernst.

Dienstag, den 3ten April.

Vormittags von 8½ Uhr an.

1. Ober-Tertia. Coet. II. Geometrie und Algebra. Oberlehrer Fischer. — Coet. I. Latein. Oberlehrer Dr. Spilleke. Französisch. Professor Hermann.
2. Unter-Secunda. Coet. II. Geschichte. Oberlehrer Voigt. — Coet. II. und I. Physik. Oberlehrer Heller. — Coet. I. Naturgeschichte Oberlehrer Schulz.
3. Ober-Secunda. Latein. Professor Dielitz. Englisch. Lehrer Schneider.
4. Prima. Mechanik. Professor Dr. Huberdt. Geschichte. Professor Kalisch.

Nachmittags 2½ Uhr

Musikalisch-declamatorischer Actus.

Zu diesen Schulfeierlichkeiten habe ich die Ehre, im Namen der Anstalt ehrerbietigst einzuladen: den Königlichen Wirklichen Geheimen Staatsminister für die Geistlichen-, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten, Herrn v. Ladenberg Excellenz, und die sämmtlichen Herren Räthe dieses Hohen Ministeriums; den Königlichen Ober-Präsidenten der Provinz Brandenburg, Herrn v. Patow Excellenz und alle Herren Räthe des Königlichen Consistoriums und Schul-Collegiums der Provinz Brandenburg; die Eltern und Pfleger unserer Zöglinge und Alle, welche den öffentlichen Bildungs-Anstalten ihre Theilnahme schenken.

Der Sommer-Curses beginnt: im Friedrichs-Wilhelms-Gymnasium Montag, den 16ten April, Vormittags 9 Uhr; in der Elisabethschule Sonabend den 14ten April, Vormittags 11 Uhr; in der Realschule Donnerstag am 19ten April, Vormittags 9 Uhr, und in der Vorschule an demselben Tage Vormittags 11 Uhr, mit Einführung der Neueintretenden durch den Director.

Zur Aufnahme neuer Zöglinge werden während der Ferien, mit Ausnahme der Sonn- und Festtage, jeden Vormittag von 8—12 Uhr bereit sein: für das Gymnasium der Unterzeichnete; für die Elisabethschule Herr Professor Müller, Kochstraße 65; für die Vorschule Herr Oberlehrer Ernst, Friedrichsstraße 212; für die Realschule Herr Professor Kalisch, Anhaltstraße 10.

Ranke.

1896

Alexander Ziese

Zu

den Schul-Feierlichkeiten,

welche in

dem Königlichen

Friedrich-Wilhelms-Gymnasium,

Montag, den 29. September d. J.

Statt finden werden,

ladet ehrerbietigst ein

der

Director Ranke.

Inhalt:

I. Mechanische und mathematische Probleme. Vom Professor Schellbach.
II. Schulnachrichten.

Berlin, 1845.
Gedruckt bei A. W. Hayn.

II.

Welche Gestalt muß ein Körper haben, wenn er auf einen Punkt seiner Oberfläche die stärkste Anziehung ausüben soll?

In dem rechtwinkligen Dreiecke ABD (Fig. 1.) stelle die Hypotenuse AD die Kraft dar, mit welcher der Punkt C den Punkt A anzieht. Die beiden Katheten AB und BD können dann, der Größe nach, als die Componenten dieser Kraft betrachtet werden. Ist nun das Gesetz bekannt, nach welchem die Kraft der Anziehung wächst, wenn die Entfernung des anziehenden Punktes abnimmt, so lassen sich sogleich alle Punkte C, C′, C″, ... bestimmen, deren Kräfte AD, AD′, AD″, ... sind, und deren horizontale Componente also bei allen gleich AB sein wird. Auf diese Weise kann eine Curve BCC′A gebildet werden, welche alle diejenigen Punkte der Ebene der Figur, deren nach B gerichtete Seitenkraft größer als AB ist, von denen sondert, bei welchen diese Componente einen kleinern Werth hat. Die erstern Punkte liegen innerhalb BCC′A, die letztern außerhalb. Dreht sich nun die Curve BCC′A um AB, als Axe, einmal herum, so beschreibt sie eine krumme Fläche BCAG. Denkt man sich alle Punkte des Raumes mit anziehenden Kräften begabt, so liegen innerhalb dieser abgeschlossenen Oberfläche diejenigen Punkte, für welche die nach B gerichtete Componente größer ist als für die außerhalb liegenden. Da sich innerhalb des Körpers BCAG stets zwei diametral gegenüberstehende Punkte finden, deren senkrecht gegen AB gerichtete Componenten gleich und entgegengesetzt sind, sich also einander aufheben, so fällt die Richtung der Resultante mit AB zusammen.

Eine gegebene Quantität nach irgend einem Gesetz anziehender Materie muß also die Gestalt des Körpers BCAG annehmen, wenn sie den Punkt A ihrer Oberfläche mit der größten Kraft nach B hin ziehen soll; denn brächte man einen Theil derselben außerhalb der Oberfläche BCAG an, so würde jetzt der Punkt A weniger stark nach B gezogen als vorher.

Dieſelbe Betrachtungsweiſe lehrt, daß auch der Körper BCHLGB, welcher durch die Umdrehung der Kurve BCH und der ganz beliebigen Linie HL um die Axe BL erzeugt wird, die ſtärkſte Anziehung auf den außerhalb liegenden Punkt A ausübt, welche eine jenſeits HLG angebrachte Maſſe bewirken kann. Dieſe Wirkungsweiſe auf den Punkt A hat aber auch der Theil HLGAH der anziehenden Materie.

Es iſt übrigens auffallend genug, daß ſich eine auf den erſten Blick ſchwierige Aufgabe durch ſo einfache geometriſche Betrachtungen löſen läßt. Selbſt wenn die anziehende Maſſe nicht homogen wäre, oder einige ihrer Theile nach andern Geſetzen anzögen als die übrigen, ſo ließe ſie ſich offenbar nach den angegebenen Prinzipien noch immer ſo vertheilen, daß ihre Wirkung auf den Punkt A ein Maximum wird.

Die nächſte Veranlaſſung, über dieſes Problem nachzudenken, gab folgende Note von Gauß in ſeiner Abhandlung über die Erſcheinungen der Kapillarität:

Constat, maximam attractionem, quam massa homogenea data in punctum datum secundum illam legem exercere potest, esse ad attractionem, quam eadem massa in figuram sphaericam redacta exercet in punctum in superficie positum, ut 3 ad $\sqrt[3]{25}$.

Zu den hier angegebenen numeriſchen Reſultaten gelangt man leicht auf folgende Weiſe: In Fig. 2. ſtelle der Quadrant CFGD einen Querſchnitt des Körpers vor, der in der Entfernung AD = x ſenkrecht gegen die Axe AB geführt iſt. Der Radius DF deſſelben bilde mit dem horizontalen Radius den Winkel FDG = θ; ferner ſei der Radius FD = η, ED = y, AE = ϱ, AF = r. Wächſt η um $d\eta$, θ um $d\theta$ und x um dx, ſo entſteht das Körperelement $\eta d\theta dx d\eta$. Wird die Kraft der Anziehung, welche dieſes Element auf den Punkt A ausübt, durch $f(\varrho)$ bezeichnet, ſo iſt die nach B gerichtete Componente derſelben $\frac{x}{\varrho} f(\varrho) \eta d\theta dx d\eta$, und wenn man AB durch a bezeichnet, ſo iſt die Anziehung A, welche der Punkt A vom ganzen Körper erfährt

$$A = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a dx \int_0^y \frac{x\eta f(\varrho)}{\varrho} d\eta$$

da

$$x^2 + \eta^2 = \varrho^2$$

und bei der Integration nach η das x conſtant iſt, ſo iſt $\eta d\eta = \varrho d\varrho$ zu ſetzen und daher

$$A = 2\pi \int_0^a x dx \int_x^r f(\varrho) d\varrho$$

Iſt die Anziehung umgekehrt proportional irgend einer Potenz der Entfernung, ſo iſt

$$f(\varrho) = \frac{k}{\varrho^n}$$

wo k die Kraft der Anziehung in der Einheit der Entfernung vorstellt. Durch diesen Werth verwandelt sich A in

$$A = \frac{2\pi k}{n-1}\int_0^a x\,dx\left(\frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{p^{n-1}}\right)$$

Bei dem hier angenommenen Gesetze der Anziehung ist, wenn in Fig. 1. AB = a, AC = r und der Winkel CAB = φ gesetzt wird, offenbar

$$\frac{k}{a^n} = \frac{k}{r^n}\cos\varphi$$

oder

$$r = a\cos\varphi^{\frac{1}{n}}$$

die Polargleichung der Curve BCAG. Da die Abscisse AM = x des Punktes C gleich r cos φ ist, so ist

$$\frac{x}{r^{n-1}} = \frac{\cos\varphi^{\frac{2}{n}}}{a^{n-2}}$$

Setzt man cos φ = z, so findet man

$$\int_0^a \frac{x\,dx}{r^{n-1}} = \frac{n+1}{n}a^{2-n}\int_0^1 z^{\frac{2}{n}}dz = \frac{n+1}{n+2}a^{2-n}$$

Ferner ist

$$\int_0^a \frac{dx}{x^{n-2}} = \frac{a^{2-n}}{2-n}$$

wenn n stets kleiner als 2 bleibt; denn da das Integral für n = 2 oder größer als 2 unendlich wird, so wird der Punkt A mit unendlicher Kraft nach B gezogen. Unsere Aufgabe hat also nur einen Sinn, so lange n zwischen 0 und 2 liegt, und in diesem Falle ergiebt sich die Anziehung

$$A = \frac{2n\pi k a^{2-n}}{4-n^2}$$

Es ist jetzt nur noch nöthig, den Inhalt des Körpers BCAG zu finden. Eine ganz einfache Rechnung giebt diesen Inhalt

$$B = \frac{2n\pi a}{3(3+n)} \quad \text{also} \quad A = \frac{3kB}{(3-n)a^n}$$

Für n = 1 verwandelt sich die Polargleichung der Curve in die Gleichung des Kreises. Wüchse also die Kraft der Anziehung umgekehrt proportional der Entfernung, so müßte

die Maſſe in die Form einer Kugel gebracht werden, wenn ſie einen Punkt ihrer Oberfläche mit der größten Gewalt anziehen ſollte. Die Größe der Anziehung und der Inhalt des Körpers ſind dann

$$A = \frac{3kB}{2a} \text{ und } B = \frac{\pi a^3}{6} \text{ wie bekannt.}$$

Für $n = 2$ oder das Newtonſche Attractionsgeſetz ſtellt in Fig. 1. BCA nach einer genauen Zeichnung die Erzeugungs-Curve dar. Ihre Conſtruction geſchieht einfach ſo, daß man aus A, als Mittelpunkt, mit AB, einen Kreisquadranten beſchreibt, für jeden Punkt E deſſelben die Ordinate zieht, welche den Halbkreis BFA in F ſchneidet, und dann AC gleich AF macht. Die Größe der Anziehung und der Inhalt des Körpers ſind

$$A = \frac{3kB}{a^2} \text{ und } B = \frac{4\pi a^3}{15}$$

Für eine Kugel vom Radius r und derſelben Maſſe B iſt die Anziehung

$$A' = \frac{kB}{r^2} \text{ und } B = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Denn bekanntlich zieht in dieſem Falle eine Kugel einen Punkt ſo an, als ob ihre Maſſe im Mittelpunkte vereinigt wäre.

Die Gleichſtellung der Werthe von B giebt

$$r = \frac{a}{\sqrt[3]{5}} \text{ und } A' = \frac{kB\sqrt[3]{25}}{a^2}$$

alſo $$A : A' = 3 : \sqrt[3]{25}$$

oder $$A = A' \cdot 1{,}02598.$$

Bei dem bekannten Verſuche von Cavendiſh, um das ſpecifiſche Gewicht der Erde zu beſtimmen, ließen ſich dieſe Reſultate vielleicht benutzen. Denn obgleich durch dieſe Abweichung von der Kugelgeſtalt die Kraft nur um $\frac{1}{15}$ ihres ganzen Werthes vermehrt wird, ſo würde doch dieſer Werth bedeutend vergrößert werden, wenn man bedenkt, daß die kleinen Kugeln nicht unmittelbar an der Oberfläche der großen ſchwingen können, alſo hier ſehr bequem ein durch eine Ebene begrenztes Segment des beſtimmten Körpers angewandt werden könnte, wie oben ſchon bemerkt wurde.

II.

Ueber die Bewegung eines Punktes.

Wenn $x = \alpha r$

so ist $d^2x = \alpha d^2r + 2d\alpha dr + rd^2\alpha$

und wenn man mit $2r^2 d\alpha$ multiplicirt

$$2r^2 d\alpha d^2x = r^2 d^2r d\cdot\alpha^2 + d\alpha d\cdot r^4 + r^4 d\cdot d\alpha^2$$
$$= r^2 d^2r d\cdot\alpha^2 + d(r^2 d\alpha)^2 \qquad (1)$$

Des bequemern Druckes wegen werde ich in dem Folgenden die Nenner der Differenzialquotienten weglassen, also gewöhnlich dx, d^2x statt $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ schreiben.

Multiplicirt man nun die Differenzialgleichung

$$d^2x + \alpha R = 0 \qquad (2)$$

mit $2r^2 d\alpha$ und wendet (1) an, so erhält man sogleich die Transformation

$$r^2 (d^2r + R)\, d\cdot\alpha^2 + d(r^2 d\alpha)^2 = 0 \qquad (3)$$

Diese Gleichung läßt sich nun unmittelbar für das Folgende benutzen.

Ist z. B. die Bewegung eines Punktes zu bestimmen, der in der Entfernung r von einem festen Punkte mit der Kraft R angezogen wird, die eine beliebige Function der Entfernung r sein kann, und man nimmt die Ebene, in welcher r und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit liegen, als Ebene der rechtwinkligen Coordinaten x und y an, so finden folgende zwei Gleichungen statt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + R\cos\varphi = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} + R\sin\varphi = 0 \qquad (4)$$

wenn r mit der Axe der x den Winkel φ bildet. Da hier

$$x = r\cos\varphi \text{ und } y = r\sin\varphi$$

so hat man aus (3) auf der Stelle, wenn $\cos\varphi$ und dann $\sin\varphi$ statt α gesetzt werden,

$$\left.\begin{aligned} r^2 (d^2r + R)\, d\cdot\cos^2\varphi + d(r^2 d\varphi \sin\varphi)^2 &= 0 \\ r^2 (d^2r + R)\, d\cdot\sin^2\varphi + d(r^2 d\varphi \cos\varphi)^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Die Addition beider Gleichungen liefert sogleich

$$d(r^2 d\varphi)^2 = 0$$

also

$$r^2 d\varphi = c \qquad (6)$$

Setzt man die Constante c statt $r^2 d\varphi$ in eine der beiden Gleichungen (5) ein und schreibt $1 - \cos^2\varphi$ statt $\sin^2\varphi$, so wird

$$r^2 (d^2r + R) = c^2$$

oder
$$d^2r + R = \frac{c^2}{r^3}$$

Durch Multiplication mit 2dr und Integration erhält man hieraus

$$dr^2 + 2\int R dr = -\frac{c^2}{r^2} + c'$$

also
$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{c' - 2\int R dr - \frac{c^2}{r^2}}$$

Aus (6) ist aber
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}$$

Durch Elimination von dt aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich

$$d\varphi = \frac{c dr}{r^2 \sqrt{c' - 2\int R dr - \frac{c^2}{r^2}}}$$

Die übrigen Rechnungen können als bekannt vorausgesetzt werden.

Behandelt man dieselbe Aufgabe im Raume, so hat man für

$$x = r\cos\alpha; \quad y = r\cos\beta; \quad z = r\cos\gamma$$

die drei Gleichungen zu integriren

$$\frac{d^2x}{dt^2} + R\cos\alpha = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} + R\cos\beta = 0; \quad \frac{d^2z}{dt^2} + R\cos\gamma = 0 \qquad (7)$$

Stellen in Fig. 2. SX, SY, SZ die drei auf einander senkrechten Coordinatenaxen vor, P den angezogenen Punkt und die übrigen krummen Linien Bogen grösster Kreise, welche auf einer mit dem Radius SP construirten Kugel liegen, ferner PSA die Ebene der Bahn des Punktes P und P′ einen in dieser Ebene um 90° von P abstehenden Punkt, so geben die sphärischen Dreiecke APX, APY, APB und die drei entsprechenden mit der gemeinschaftlichen Seite AP′ die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} \cos\alpha = \cos\nu\cos\theta - \sin\nu\sin\theta\cos i & \cos\alpha' = \sin\nu\cos\theta + \cos\nu\sin\theta\cos i \\ \cos\beta = \cos\nu\sin\theta + \sin\nu\cos\theta\cos i & \cos\beta' = \sin\nu\sin\theta - \cos\nu\cos\theta\cos i \\ \cos\gamma = \sin\nu\sin i & \cos\gamma' = -\cos\nu\sin i \end{array}\right\} \quad (8)$$

so daß also

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2\alpha + \cos^2\alpha' = 1 - \sin^2\theta\sin^2 i \\ \cos^2\beta + \cos^2\beta' = 1 - \cos^2\theta\sin^2 i \\ \cos^2\gamma + \cos^2\gamma' = \sin^2 i \end{array}\right\} \quad (9)$$

Ferner findet man sogleich aus (8) und (9)

$$\left.\begin{array}{l} d\cos\alpha = -\cos\alpha' d\nu; \quad d\cos\beta = -\cos\beta' d\nu; \quad d\cos\gamma = -\cos\gamma' d\nu \\ d\cos^2\alpha = -d\cos^2\alpha'; \quad d\cos^2\beta = -d\cos^2\beta'; \quad d\cos^2\gamma = -d\cos^2\gamma' \end{array}\right\} \quad (10)$$

Die Gleichungen (7) geben also vermöge der Transformation (3)

$$r^2 (d^2r + R)\, d\cdot\cos{}^2\alpha + d\,(r^2 d\cos\alpha)^2 = 0$$
$$r^2 (d^2r + R)\, d\cdot\cos{}^2\beta + d\,(r^2 d\cos\beta)^2 = 0$$
$$r^2 (d^2r + R)\, d\cdot\cos{}^2\gamma + d\,(r^2 d\cos\gamma)^2 = 0$$

oder durch Anwendung von (10)

$$r^2 (d^2r + R)\, d\cdot\cos{}^2\alpha' = d\,(r^2 d\nu\cos\alpha')^2$$
$$r^2 (d^2r + R)\, d\cdot\cos{}^2\beta' = d\,(r^2 d\nu\cos\beta')^2$$
$$r^2 (d^2r + R)\, d\cdot\cos{}^2\gamma' = d\,(r^2 d\nu\cos\gamma')^2$$

Da $\cos{}^2\alpha' + \cos{}^2\beta' + \cos{}^2\gamma' = 1$, so liefert die Addition der drei letzten Gleichungen ganz wie oben $d\,(r^2 d\nu)^2 = 0$, also $r^2 d\nu = c$

und durch Einführung dieses Werthes in eine dieser Gleichungen

$$r^2 (d^2r + R) = c^2$$

Eine ähnliche Anwendung findet die Transformation (3) auch noch bei folgender Aufgabe, welche Jakobi im 24sten Bande des Crelle'schen Journals Seite 15 auf eine besondere Weise behandelt: Ein Punkt A in Fig. 4. sei gezwungen, sich auf einer Umdrehungsfläche zu bewegen, von welcher ZAB eine Meridiancurve ist. Die Kraft, welche ihn angreift, möge nur in der Meridianebene wirken; ihre Componente AE, welche senkrecht gegen die Umdrehungsaxe OZ wirkt, sei X, die andere AF, parallel dieser Axe, heiße Y. Beide mögen Functionen der Entfernung AE oder $CO = x$ von der Axe OZ sein.

Die Coordinaten des Punktes A sind, wie sie die Figur angiebt,

$$OD = \xi;\quad OD = \eta;\quad CA = y$$

Die Richtung des Widerstandes λ, welchen die Fläche zu leisten hat, fällt ebenfalls ganz in die Meridianebene und ist der Richtung der Kraft entgegengesetzt.

Stellt ds das Bogenelement der Meridiancurve vor, so ist die senkrecht gegen die Axe gerichtete Componente des Widerstandes $\lambda\frac{dy}{ds}$ und die mit ihr parallele $-\lambda\frac{dx}{ds}$. Es ist hier $\frac{dy}{ds}$ mit negativen Zeichen genommen worden, da wir voraussetzen, daß der Bogen wächst, wenn y abnimmt. Bildet nun die Meridianebene mit der festen Ebene ZOX den Winkel φ, so sind die Gleichungen der Bewegung offenbar folgende

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \left(X + \lambda\frac{dy}{ds}\right)\cos\varphi \qquad (11)$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \left(X + \lambda\frac{dy}{ds}\right)\sin\varphi \qquad (12)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y - \lambda\frac{dx}{ds} \qquad (13)$$

Es ist aber $\xi = x\cos\varphi$ und $\eta = x\sin\varphi$

daher giebt die Gleichung (3) statt (11) und (12) die beiden Gleichungen

$$x^2\left(d^2x - X - \lambda\frac{dy}{ds}\right)d\cdot\cos^2\varphi + d(x^2d\varphi\sin\varphi)^2 = 0$$

$$x^2\left(d^2x - X - \lambda\frac{dy}{ds}\right)d\cdot\sin^2\varphi + d(x^2d\varphi\cos\varphi)^2 = 0$$

durch deren Addition man

$$d(x^2d\varphi)^2 = 0 \text{ und daraus } x^2d\varphi = c$$

erhält. Durch Einführung dieser Constanten c in eine der letzten beiden Gleichungen kommt dann

$$x^2\left(d^2x - X - \lambda\frac{dy}{ds}\right) = c^2$$

Stellt man diese Gleichung mit (13) zusammen, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \frac{c^2}{x^3} + \lambda\frac{dy}{ds}\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y - \lambda\frac{dx}{ds}\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Diese Gleichungen spricht Jakobi am angeführten Orte in folgendem Satze aus:

Punctum, quod in data superficie revolutione genita moveri debet, vi sollicitetur in plano Meridiani directa et a sola positione puncti in ipso Meridiano pendente: revocari potest motus propositus ad motum puncti in curva meridiana, accedente ad vim sollicitantem alia quae axi perpendicularis et cubo distantiae puncti ab axe inverse proportionalis est.

Das Auftreten des Gliedes $\frac{c^2}{x^3}$ in der ersten der Gleichungen (14) erscheint hier in etwas größerem Zusammenhange als dort.

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit dx, die zweite mit dy und addirt beide Producte, so erhält man

$$\frac{dxd^2x + dyd^2y}{dt^2} = Xdx + Ydy + \frac{c^2dx}{x^3}$$

Ist u die Geschwindigkeit des bewegten Punktes, also $u = \frac{ds}{dt}$, und man integrirt die letzte Gleichung, nachdem sie mit 2 multiplicirt worden ist, so kommt

$$\frac{ds^2}{dt^2} = u^2 = 2\int(Xdx + Ydy) - \frac{c^2}{x^2}$$

wenn die zweite Constante nach der Integration hinzugefügt wird. Wenn der Bogen mit der Zeit wächst, so folgt hieraus

$$t = \int \frac{\frac{ds}{dx}\,dx}{\left\{2\int\left(X + Y\frac{dy}{dx}\right)dx - \frac{c^2}{x^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

Da

$$d\varphi = \frac{c\,dt}{x^2}$$

so erhält man endlich

$$\varphi = c\int \frac{\frac{ds}{dx}\,dx}{x^2\left\{2\int\left(X + Y\frac{dy}{dx}\right)dx - \frac{c^2}{x^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

Aus der Gleichung $f(x, y) = 0$ der Meridiancurve werden die Werthe $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{ds}{dx}$ bestimmt. Das Uebrige ist bei Jakobi a. a. O. nachzulesen.

III.

Ueber die Drehung eines festen Körpers um einen festen Punkt ohne Einwirkung beschleunigender Kräfte.

Die folgenden Rechnungen haben nur den Zweck, schneller und mit größerer Klarheit zu den bekannten Formeln zu führen, welche dieses Problem lösen.

Der feste Punkt O, um welchen sich der Körper dreht, sei Anfangspunkt der drei auf einander senkrechten und im Raume festen Coordinatenaxen OX, OY, OZ. Die Coordinaten eines Punktes des Körpers auf dieses Coordinatensystem bezogen, mögen x, y, z heißen. Sie werden während der Drehung des Körpers ihre Werthe ändern, oder Functionen der Zeit t sein. Durch den festen Punkt O lege man ein zweites rechtwinkliges Coordinatensystem OX, OY, OZ, welches im Körper fest und mit ihm im Raume beweglich ist. Die Coordinaten eines Punktes des Körpers in Bezug auf dieses Coordinatensystem sollen ξ, η, ζ genannt werden. Diese Größen sind von der Zeit unabhängig und ändern sich nur, wenn man von einem Punkte des Körpers zu einem andern übergeht. Die Winkel, welche die beweglichen Coordinatenaxen mit den festen bilden, mögen auf folgende Weise benannt werden:

$$XOX = \alpha \qquad YOX = \beta \qquad ZOX = \gamma$$
$$XOY = \alpha_1 \qquad YOY = \beta_1 \qquad ZOY = \gamma_1$$
$$XOZ = \alpha_2 \qquad YOZ = \beta_2 \qquad ZOZ = \gamma_2$$

Diese Winkel sind Functionen der Zeit. Vor allen diesen Winkeln wird im Folgenden das Zeichen cos weggelassen, so daß z. B. unter α stets cos α zu verstehen ist. Ebenso werden wir fast immer, wie in No. II., die Differenzialquotienten ohne Nenner schreiben, was zu keinem Irrthum Veranlassung geben kann, da nur nach der Zeit t differenzirt wird.

Die neun Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$; $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$; $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$ sind folgenden zwölf Gleichungen unterworfen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (1) \qquad \left.\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 &= 1 \\ \beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 &= 1 \\ \gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 &= 0 \\ \gamma\alpha + \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 &= 0 \\ \alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3) \qquad \left.\begin{aligned} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= 0 \\ \alpha_2\alpha + \beta_2\beta + \gamma_2\gamma &= 0 \\ \alpha\,\alpha_1 + \beta\,\beta_1 + \gamma\,\gamma_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

die aber bekanntlich nur als sechs von einander verschiedene zu betrachten sind. Die Coordinaten x y z werden durch $\xi\ \eta\ \zeta$ und diese neun Winkel nach den gewöhnlichen Transformationsformeln so bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha\,\xi + \beta\,\eta + \gamma\,\zeta \\ y &= \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta \\ z &= \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die Componenten der Geschwindigkeit irgend eines Punktes nach den festen Axen sind hiernach, da $\xi\ \eta\ \zeta$ von t unabhängig sind,

$$\left.\begin{aligned} dx &= \xi d\alpha + \eta d\beta + \zeta d\gamma \\ dy &= \xi d\alpha_1 + \eta d\beta_1 + \zeta d\gamma_1 \\ dz &= \xi d\alpha_2 + \eta d\beta_2 + \zeta d\gamma_2 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Man untersuche nun, ob jetzt, zur Zeit t, während der Bewegung des Körpers außer dem Punkte O, noch ein anderer Punkt im Körper ruht. Die Coordinaten dieses Punktes mögen $\xi'\ \eta'\ \zeta'$ heißen. Man findet sie aus (6), wenn man die Componenten seiner Geschwindigkeiten Null setzt, also durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \xi' d\alpha + \eta' d\beta + \zeta' d\gamma &= 0 \\ \xi' d\alpha_1 + \eta' d\beta_1 + \zeta' d\gamma_1 &= 0 \\ \xi' d\alpha_2 + \eta' d\beta_2 + \zeta' d\gamma_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Man sieht schon, daß durch diese drei Gleichungen ξ', η', ζ' nicht bestimmt werden können, oder daß es einen einzelnen solchen Punkt nicht giebt; aber es läßt sich doch eine einfachere Beziehung zwischen den Coordinaten ξ', η', ζ' nachweisen. Um die Resultate der Elimination symmetrisch zu machen, muß man die Differenziale der Gleichungen (1), (2), (3) benutzen, die indessen so einfach sind, daß sie nicht brauchen besonders niedergeschrieben zu werden. Man multiplicire nun die Gleichungen der Reihe nach mit α, α_1, α_2 und addire die Producte, so kommt, wenn man das Differenzial der ersten der Gleichungen (2) benutzt,

$$\eta'(\alpha d\beta + \alpha_1 d\beta_1 + \alpha_2 d\beta_2) + \zeta'(\alpha d\gamma + \alpha_1 d\gamma_1 + \alpha_2 d\gamma_2) = 0$$

Durch Hülfe des Differenzials der letzten der Gleichungen (3) verwandelt sich dieses Resultat in

$$-\eta'(\beta d\alpha + \beta_1 d\alpha_1 + \beta_2 d\alpha_2) + \zeta'(\alpha d\gamma + \alpha_1 d\gamma_1 + \alpha_2 d\gamma_2) = 0$$

Man erhält auf ganz ähnliche Weise durch Multiplication mit β, β_1, β_2 und Addition, ferner durch Multiplication mit γ, γ_1, γ_2 und Addition und gehörige Benutzung der Differenziale der übrigen Gleichungen (2) und (3), noch zwei ähnliche Gleichungen. Die Zusammenstellung aller drei liefert folgende Gleichung

$$\frac{\xi'}{\gamma d\beta + \gamma_1 d\beta_1 + \gamma_2 d\beta_2} = \frac{\eta'}{\alpha d\gamma + \alpha_1 d\gamma_1 + \alpha_2 d\gamma_2} = \frac{\zeta'}{\beta d\alpha + \beta_1 d\alpha_1 + \beta_2 d\alpha_2} \quad (8)$$

Die Differenzfälle der Gleichungen (2) und (3) sind also nur benutzt worden, um ein symmetrisches Resultat zu erhalten. Die Gleichung (8) stellt eine gerade Linie dar, welche durch den Punkt O geht, wenn man sich unter ξ', η', ζ' die laufenden Coordinaten denkt. Es giebt also außer O nicht nur noch einen Punkt, welcher zur Zeit t ruht, sondern eine ganze Linie ist für diesen Augenblick im Körper in Ruhe. Diese Linie ist die augenblickliche Drehungsaxe genannt worden, denn sie ändert im Allgemeinen ihre Lage sowohl im Körper als im Raume jeden Augenblick. Daß aber die Drehung auch wirklich um diese Axe geschieht, geht noch deutlicher aus den spätern Formeln hervor.

Wir wollen nun in dieser Drehungsaxe einen einzelnen Punkt so wählen, daß ξ' seinem Divisor in (8) gleich wird; dann werden η' und ζ' ebenfalls ihren Divisoren gleich und man erhält für die drei Coordinaten dieses Punktes folgende Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \gamma d\beta + \gamma_1 d\beta_1 + \gamma_2 d\beta_2 = -\beta d\gamma - \beta_1 d\gamma_1 - \beta_2 d\gamma_2 \\ \eta' &= \alpha d\gamma + \alpha_1 d\gamma_1 + \alpha_2 d\gamma_2 = -\gamma d\alpha - \gamma_1 d\alpha_1 - \gamma_2 d\alpha_2 \\ \zeta' &= \beta d\alpha + \beta_1 d\alpha_1 + \beta_2 d\alpha_2 = -\alpha d\beta - \alpha_1 d\beta_1 - \alpha_2 d\beta_2 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

bei denen die Differenziale der Gleichungen (3) benutzt worden sind.

Mit Hülfe dieser Gleichungen (9) lassen sich nun leicht folgende Formeln bilden:

$$\beta\zeta' - \gamma\eta' = \beta^2 d\alpha + \beta\beta_1 d\alpha_1 + \beta\beta_2 d\alpha_2 + \gamma^2 d\alpha + \gamma\gamma_1 d\alpha_1 + \gamma\gamma_2 d\alpha_2 =$$
$$(\beta^2 + \gamma^2) d\alpha + (\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1) d\alpha_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2) d\alpha_2 =$$
$$(1 - \alpha^2) d\alpha - \alpha\alpha_1 d\alpha_1 - \alpha\alpha_2 d\alpha_2 = d\alpha - \alpha(\alpha d\alpha + \alpha_1 d\alpha_1 + \alpha_2 d\alpha_2) = d\alpha$$

Hierbei ist die erste der Gleichungen (1) benutzt worden, ferner die zweite und dritte Gleichung der No. (4) und das Differenzial der ersten der Gleichungen (2). Ganz durch dieselben Hülfsmittel findet man nun allgemein

$$\left.\begin{array}{lll} d\alpha = \beta\zeta' - \gamma\eta' & d\beta = \gamma\xi' - \alpha\zeta' & d\gamma = \alpha\eta' - \beta\xi' \\ d\alpha_1 = \beta_1\zeta' - \gamma_1\eta' & d\beta_1 = \gamma_1\xi' - \alpha_1\zeta' & d\gamma_1 = \alpha_1\eta' - \beta_1\xi' \\ d\alpha_2 = \beta_2\zeta' - \gamma_2\eta' & d\beta_2 = \gamma_2\xi' - \alpha_2\zeta' & d\gamma_2 = \alpha_2\eta' - \beta_2\xi' \end{array}\right\} \quad (10)$$

Aus der ersten dieser drei Gruppen von Gleichungen folgt durch Multiplication mit $d\alpha$, $d\alpha_1$, $d\alpha_2$ und Addition, wenn man (9) berücksichtigt und dann ähnlich mit den beiden anderen Gruppen verfährt

$$\left.\begin{array}{l} d\alpha^2 + d\alpha_1^2 + d\alpha_2^2 = \eta'^2 + \zeta'^2 \\ d\beta^2 + d\beta_1^2 + d\beta_2^2 = \zeta'^2 + \xi'^2 \\ d\gamma^2 + d\gamma_1^2 + d\gamma_2^2 = \xi'^2 + \eta'^2 \end{array}\right\} \quad (11)$$

Man multiplicire nun die letzte der drei Gruppen mit $d\beta$, $d\beta_1$, $d\beta_2$, addire die Producte und benutze wieder das Differenzial der zweiten der Gleichungen (2) und die letzte der Gleichungen (9), verfahre dann ähnlich mit den zwei andern Gruppen, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} d\beta d\gamma + d\beta_1 d\gamma_1 + d\beta_2 d\gamma_2 = -\eta'\zeta' \\ d\gamma d\alpha + d\gamma_1 d\alpha_1 + d\gamma_2 d\alpha_2 = -\zeta'\xi' \\ d\alpha d\beta + d\alpha_1 d\beta_1 + d\alpha_2 d\beta_2 = -\xi'\eta' \end{array}\right\} \quad (12)$$

Nun ist es leicht, das Quadrat der Geschwindigkeit irgend eines Punktes xyz des Körpers durch die entsprechenden Coordinaten $\xi\eta\zeta$ und $\xi'\eta'\zeta'$ auszudrücken. Man erhält nämlich aus (6), mit Benutzung von (11) und (12), wenn ds das Element des durchlaufenen Bogens darstellt:

$$\left.\begin{array}{l} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ = \xi^2(\eta'^2+\zeta'^2) + \eta^2(\zeta'^2+\xi'^2) + \zeta^2(\xi'^2+\eta'^2) - 2\eta\zeta\eta'\zeta' - 2\xi\zeta\xi'\zeta' - 2\xi\eta\xi'\eta' \\ = \xi'^2(\eta^2+\zeta^2) + \eta'^2(\zeta^2+\xi^2) + \zeta'^2(\xi^2+\eta^2) - 2\eta'\zeta'\eta\zeta - 2\zeta'\xi'\zeta\xi - 2\xi'\eta'\xi\eta \\ = (\eta\zeta' - \zeta\eta')^2 + (\zeta\xi' - \xi\zeta')^2 + (\xi\eta' - \eta\xi')^2 \\ = (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2) - (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')^2 \end{array}\right\} \quad (13)$$

Die Coordinaten $\xi'\eta'\zeta'$ des vorher in der augenblicklichen Drehungsaxe bestimmten festen Punktes mögen in Bezug auf das im Raume feste Coordinatensystem x'y'z' heißen; es ist dann bekanntlich

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha\,\xi' + \beta\,\eta' + \gamma\,\zeta' \\ y' &= \alpha_1\xi' + \beta_1\eta' + \gamma_1\zeta' \\ z' &= \alpha_2\xi' + \beta_1\eta' + \gamma_2\zeta' \end{aligned}\right\} \quad (14) \qquad \left.\begin{aligned} \xi' &= \alpha x' + \alpha_1 y' + \alpha_2 z' \\ \eta' &= \beta x' + \beta_1 y' + \beta_2 z' \\ \zeta' &= \gamma x' + \gamma_1 y' + \gamma_2 z' \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Setzt man nun $$x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \varrho^2 \qquad (16)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = \varrho'^2 \qquad (17)$$

und nennt den Winkel, welchen ϱ und ϱ' mit einander bilden, δ, so ergiebt sich

$$xx' + yy' + zz' = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = \varrho\varrho' \cos\delta = \theta \qquad (18)$$

Dieser Ausdruck ist der Kürze wegen durch θ bezeichnet worden; seine Richtigkeit ergiebt sich, wenn man mit $\varrho\varrho'$ dividirt, wodurch sich die beiden ersten Ausdrücke als Cosinus des Winkels δ darstellen. Aus (14) und (6) findet man mit Hülfe der schon oft benutzten Ausdrücke

$$x'dx + y'dy + z'dz = 0 \qquad (19)$$

so daß also

$$xdx' + ydy' + zdz' = d\theta \qquad (20)$$

Aus dem letzten Ausdrucke in (13) sieht man, daß das Quadrat der Geschwindigkeit

$$ds^2 = \varrho^2\varrho'^2 - \varrho^2\varrho'^2 \cos^2\delta = \varrho^2\varrho'^2 \sin^2\delta$$

Es ist aber $\varrho \sin\delta$ die Entfernung r des Punktes xyz von der augenblicklichen Drehungsaxe, daher ist

$$ds = r'\varrho \qquad (21)$$

also ist ϱ' die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit, denn es ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich ein Punkt in der Entfernung 1 um die augenblickliche Drehungsaxe bewegt.

Man bilde nun die identische Gleichung

$$(\varrho^2 x' - \theta x)\,x + (\varrho^2 y' - \theta y)\,y + (\varrho^2 z' - \theta z)\,z = 0 \qquad (22)$$

Ihr Differenzial ist

$$(\varrho^2 x' - \theta x)\,dx + (\varrho^2 y' - \theta y)\,dy + (\varrho^2 z' - \theta z)\,dz = 0 \qquad (23)$$

wie sich sehr leicht ergiebt, da ϱ von der Zeit t unabhängig ist. Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\frac{ydz - zdy}{\varrho^2 x' - \theta x} = \frac{zdx - xdz}{\varrho^2 y' - \theta y} = \frac{xdy - ydx}{\varrho^2 z' - \theta z} \qquad (24)$$

Da aber

$$(ydz - zdy)^2 + (zdx - xdz)^2 + (xdy - ydx)^2 =$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (xdx + ydy + zdz)^2 = \varrho^2 ds^2$$

und

$$(\varrho^2 x' - \theta x)^2 + (\varrho^2 y' - \theta y)^2 + (\varrho^2 z' - \theta z)^2 =$$

$$\varrho^4(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2\varrho^2\theta(xx' + yy' + zz') + \theta^2(x^2 + y^2 + z^2) = \varrho^4\varrho'^2 - \varrho^2\theta^2 = \varrho^2 ds^2$$

so sind die numerischen Werthe der Zähler und Nenner der drei Brüche in (24) einander gleich. Man kann daher setzen

$$ydx - zdy = \varrho^2 x' - \theta x = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta') - (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)$$
$$= \alpha(\varrho^2\xi' - \theta\xi) + \beta(\varrho^2\eta' - \theta\eta) + \gamma(\varrho^2\zeta' - \theta\zeta)$$

Der Kürze wegen schreibe man

$$\left.\begin{aligned} \varrho^2\xi' - \theta\xi &= \xi'(\eta^2 + \zeta^2) - \xi(\eta\eta' + \zeta\zeta') = P \\ \varrho^2\eta' - \theta\eta &= \eta'(\zeta^2 + \xi^2) - \eta(\zeta\zeta' + \xi\xi') = Q \\ \varrho^2\zeta' - \theta\zeta &= \zeta'(\xi^2 + \eta^2) - \zeta(\xi\xi' + \eta\eta') = R \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

dann wird also

$$\left.\begin{aligned} ydz - zdy &= \varrho^2 x' - \theta x = \alpha P + \beta Q + \gamma R \\ zdx - xdz &= \varrho^2 y' - \theta y = \alpha_1 P + \beta_1 Q + \gamma_1 R \\ xdy - ydx &= \varrho^2 z' - \theta z = \alpha_2 P + \beta_2 Q + \gamma_2 R \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Sind nun die im Körper festen Axen sogenannte Trägheitsaxen, so daß

$$\int \eta\zeta dm = 0; \quad \int \zeta\xi dm = 0; \quad \int \xi\eta dm = 0$$

und man setzt

$$\int(\eta^2 + \zeta^2)\,dm = A; \quad \int(\zeta^2 + \xi^2)\,dm = B; \quad \int(\xi^2 + \eta^2)\,dm = C$$
$$\int(ydz - zdy)\,dm = L; \quad \int(zdx - xdz)\,dm = M; \quad \int(xdy - ydx)\,dm = N$$

wo L, M, N bekanntlich constante Größen sind, da keine Kräfte auf den Körper wirken, so erhält man aus (26), wenn man alle Gleichungen mit dem Massenelemente dm multiplicirt und dann integrirt:

$$\left.\begin{aligned} \alpha A\xi' + \beta B\eta' + \gamma C\zeta' &= L \\ \alpha_1 A\xi' + \beta_1 B\eta' + \gamma_1 C\zeta' &= M \\ \alpha_2 A\xi' + \beta_2 B\eta' + \gamma_2 C\zeta' &= N \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Hieraus folgt sehr leicht

$$A^2\xi'^2 + B^2\eta'^2 + C^2\zeta'^2 = L^2 + M^2 + N^2 = E^2 \quad (28)$$

wo E das aus den drei Paaren L, M, N resultirende Kräftepaar ist.

Ferner folgt aus (27)

$$\left.\begin{aligned} A\xi' &= \alpha L + \alpha_1 M + \alpha_2 N \\ B\eta' &= \beta L + \beta_1 M + \beta_2 N \\ C\zeta' &= \gamma L + \gamma_1 M + \gamma_2 N \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

$$\left.\begin{aligned} Ad\xi' &= d\alpha L + d\alpha_1 M + d\alpha_2 N = \eta'\zeta'(B - C) \\ Bd\eta' &= d\beta L + d\beta_1 M + d\beta_2 N = \zeta'\xi'(C - A) \\ Cd\zeta' &= d\gamma L + d\gamma_1 M + d\gamma_2 N = \xi'\eta'(A - B) \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

wobei die rechten Seiten dieser Gleichungen die Bildungsweisen angeben. Die letzten Theile der Gleichungen (30) sind mit Hülfe von (10) aus (29) gebildet worden. Multiplicirt man den ersten und dritten Theil der Gleichungen (30) der Reihe nach mit ξ', η', ζ' und addirt die Producte, so findet man

$$A\xi' d\xi' + B\eta' d\eta' + C\zeta' d\zeta' = 0$$

Die Integration dieſer Gleichung liefert

$$A\xi'^2 + B\eta'^2 + C\zeta'^2 = D^2 \qquad (31)$$

Aus den Gleichungen (28) und (31) kann man nun etwa ξ' und η' durch ζ' ausdrücken. Man findet ſo

$$\xi' = \pm \frac{\sqrt{E^2 - BD^2 + C(B-C)\zeta'^2}}{\sqrt{A(A-B)}} \qquad \eta' = \pm \frac{\sqrt{AD^2 - E^2 - C(A-C)\zeta'^2}}{\sqrt{B(A-B)}} \qquad (32)$$

alſo

$$\xi'\eta'(A-B)\sqrt{AB} = \pm \sqrt{AD^2 - E^2 - C(A-C)\zeta'^2}\sqrt{E^2 - BD^2 + C(B-C)\zeta'^2}$$

Setzt man nun dieſen Werth in die dritte Gleichung (30) ein, ſo erhält man

$$dt = \pm \frac{C\sqrt{AB}\, d\zeta'}{\sqrt{AD^2 - E^2 - C(A-C)\zeta'^2}\sqrt{E^2 - BD^2 + C(B-C)\zeta'^2}} \qquad (33)$$

Das Integral dieſer Gleichung giebt ζ' durch t; daher erhält man aus (32) auch η' und ξ' durch t. Aus (29) ergiebt ſich aber ſogleich mit Bezug auf (5)

$$A\xi\xi' + B\eta\eta' + C\zeta\zeta' = Lx + My + Nz \qquad (34)$$

Multiplicirt man die Gleichungen (26) entſprechend mit L, M, N, addirt dann die drei Producte und nimmt auf (29) Rückſicht, ſo gelangt man zu der Gleichung

$$(ydz - zdy)L + (zdx - xdz)M + (xdy - ydx)N = PA\xi' + QB\eta' + RC\zeta' \qquad (35)$$

Aus den Gleichungen (16), (34), (35) laſſen ſich nun x, y, z berechnen, da ξ', η', ζ' durch die Zeit t ausgedrückt worden ſind.

Dieſe Rechnung hat keine Schwierigkeit, wenn L und M Null wären, denn dann hätte man, wenn in (34) und (35)

$$A\xi\xi' + B\eta\eta' + C\zeta\zeta' = p \text{ und } PA\xi' + QB\eta' + RC\zeta' = q$$

geſetzt werden, aus (34)

$$z = \frac{p}{N} \text{ und } x^2 + y^2 = \rho^2 - \frac{p^2}{N^2} \qquad (36)$$

und aus (35)

$$xdy - ydx = \frac{qdt}{N} \qquad (37)$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt

$$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{d.\frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{qNdt}{\rho^2 N^2 - p^2} \qquad (38)$$

und hieraus durch Integration

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \int \frac{qN\,dt}{\varrho^2 N^2 - p^2} = T \qquad (39)$$

In diesem Integrale sind ϱ und N Constante, dagegen p und q Functionen von t. Es ist also

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} T$$

und, vermöge (36),

$$x = \frac{\sqrt{\varrho^2 N^2 - p^2}}{N}\cos T \text{ und } y = \frac{\sqrt{\varrho^2 N^2 - p^2}}{N}\sin T \qquad (40)$$

Es können also in diesem Falle die Coordinaten x, y, z irgend eines Punktes des Körpers, der durch die Coordinaten ξ, η, ζ gegeben ist, zu jeder Zeit gefunden werden. Auf diesen besondern Fall läßt sich aber der allgemeine zurückführen. Denn man lege durch den Anfangspunkt O ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem, bei welchem die neun Winkel

$$abc;\ a_1b_1c_1;\ a_2b_2c_2$$

das bedeuten, was vorher durch $\alpha\beta\gamma$; $\alpha_1\beta_1\gamma_1$; $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ bezeichnet wurde. Dieses Coordinatensystem sei aber im Raume fest. Die Coordinaten eines Punktes des Körpers in Bezug auf dieses feste System mögen x_1, y_1, z_1 sein; es ist dann

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= ax + a_1y + a_2z \\ y_1 &= bx + b_1y + b_2z \\ z_1 &= cx + c_1y + c_2z \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

und auch

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \varrho^2 \qquad (42)$$

Man setze nun

$$\cos c = \frac{L}{E};\quad \cos c_1 = \frac{M}{E};\quad \cos c_2 = \frac{N}{E} \qquad (43)$$

was offenbar nach (28) erlaubt ist. Nach der letzten Gleichung (41) ist dann

$$Lx + My + Nz = Ez_1 = p \qquad (44)$$

Aus (41) erhält man aber

$$\left.\begin{aligned} dx_1 &= a\,dx + a_1\,dy + a_2\,dz \\ dy_1 &= b\,dx + b_1\,dy + b_2\,dz \\ dz_1 &= c\,dx + c_1\,dy + c_2\,dz \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

Da nun aus der analytischen Geometrie folgende Gleichungen bekannt sind:

$$\left.\begin{aligned} a &= b_1c_2 - c_1b_2 & b &= c_1a_2 - a_1c_2 & c &= a_1b_2 - b_1a_2 \\ a_1 &= b_2c - c_2b & b_1 &= c_2a - a_2c & c_1 &= a_2b - b_2a \\ a_2 &= b\,c_1 - c\,b_1 & b_2 &= c\,a_1 - a\,c_1 & c_2 &= a\,b_1 - b\,a_1 \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

so wird man sich aus (41) und (44) leicht den Ausdruck bilden können

$$y_1 dx_1 - x_1 dy_1 = -c(ydz - zdy) - c_1(zdx - xdz) - c_2(xdy - ydx)$$
$$= -\frac{(ydz - zdy)L + (zdx - xdz)M + (xdy - ydx)N}{E} = -\frac{qdt}{E}$$

Man hat also jetzt die Gleichungen zu integriren

$$z_1 = \frac{p}{E};\quad y_1 dx_1 - x_1 dy_1 = -\frac{qdt}{E};\quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \varrho^2$$

statt daß man vorher integrirte

$$z = \frac{p}{N};\quad ydx - xdy = \frac{qdt}{N};\quad x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$$

Setzt man also E statt N und $-q$ statt q, so können die gefundenen Formeln benutzt werden. Man erhält auf diese Weise

$$x_1 = \frac{\sqrt{\varrho^2 E^2 - p^2}}{E}\cos T;\quad y_1 = -\frac{\sqrt{\varrho^2 E^2 - p^2}}{E}\sin T;\quad z_1 = \frac{p}{E} \qquad (47)$$

Die Coordinaten x y z findet man aus x_1 y_1 z_1 durch die bekannten Formeln

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 \\ y &= a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 \\ z &= a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1 \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

IV.

Inhaltsbestimmung des durch die Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten gegebenen Körpers

$$\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{b}\right)^\beta + \left(\frac{z}{c}\right)^\gamma = 1.$$

Betrachtet man, wie hier geschehen soll, die Exponenten α, β, γ nur als gerade Zahlen oder Brüche mit geraden Zählern, dann kann Fig. 5. einen Octanten dieses Körpers darstellen. Man theile $OX = a$ in λ gleicher Theile; ein solcher Theil sei $AA' = \frac{a}{\lambda}$. Die Linie OA umfasse l solcher Theile, so daß $OA = \frac{la}{\lambda}$. Die Linien AF und A'F' sind der

Axe OY parallel und FEK ist ein Schnitt des Körpers durch die Ebene xyz, so ist dann

$$AF = b\left(1 - \frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

Diese Linie denke man sich in μ gleiche Theile getheilt; einer dieser Theile sei BC, also gleich $\frac{b}{\mu}\left(1 - \frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ und AB möge m solcher Theile betragen, so daß

$$AB = \frac{mb}{\mu}\left(1 - \frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

Für die Ordinate z findet man dann

$$\left(\frac{z}{c}\right)^\gamma = 1 - \frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha} - \frac{m^\beta}{\mu^\beta}\left(1 - \frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right) = \left(1 - \frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)\left(1 - \frac{m^\beta}{\mu^\beta}\right)$$

also

$$CD = z = c\left(1 - \frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(1 - \frac{m^\beta}{\mu^\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Der Inhalt der ganzen Säule von der Höhe CD ist, wie die Figur lehrt,

$$\frac{a}{\lambda} \cdot \frac{b}{\mu}\left(1 - \frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot c\left(1 - \frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(1 - \frac{m^\beta}{\mu^\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Will man nun den Inhalt J des Octanten haben, so muß man in diesem Ausdrucke offenbar dem l nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3, ... $\lambda - 1$ beilegen, während das m die Werthe 0, 1, 2, 3, ... $\mu - 1$ erhält. Nun ist aber bekanntlich

$$\int_a^b fx\,dx = \delta\left\{fa + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots + f(a+(n-1)\delta)\right\}$$

wenn $\delta = \frac{b-a}{n}$ und n unendlich groß genommen wird; daher ist auch

$$J = abc\int_0^1 dx\int_0^1 dy\,(1-x^\alpha)^{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}(1-y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}} = abc\left\{\int_0^1 dx\,(1-x^\alpha)^{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}\right\}\left\{\int_0^1 dy\,(1-y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}}\right\}$$

Wer mit den Eigenschaften der Function Γ vertraut ist, kann diese Integrale leicht auf einfachere zurückführen; es ist nämlich

$$\int_0^1 (1-x)^{a-1}x^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

und daher

$$\int_0^1 dx\,(1-x^\alpha)^{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+1\right)}$$

und

$$\int_0^1 dy\,(1-y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+1\right)}$$

also

$$J = abc\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+1\right)} = \frac{abc}{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)}$$

Gauß bezeichnet $\Gamma(a+1)$ durch $\Pi(a)$, daher wäre nach seiner Bezeichnung

$$J = abc\,\frac{\Pi\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Pi\left(\frac{1}{\beta}\right)\Pi\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\Pi\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)}$$

Es ist dies ein specieller Fall der so berühmt gewordenen Dirichlet'schen Formel.

Für den Inhalt E des ganzen Ellipsoids findet man z. B.:

$$E = abc\,\frac{(\Gamma\frac{1}{2})^3}{\Gamma(2+\frac{1}{2})} = abc\,\frac{(\Gamma\frac{1}{2})^3}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})} = \tfrac{4}{3}abc\,(\Gamma\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{4}{3}abc\pi$$

Um ferner das Trägheitsmoment dieses Körpers in Bezug auf irgend eine Axe zu berechnen, muß man die Integrale bestimmen

$$\int x^2 dm;\quad \int y^2 dm;\quad \int z^2 dm,$$

wenn dm das Massenelement ist. Theilt man die Ordinate CD in ν gleiche Theile, so wird, wenn die Dichte der Einheit gleich gesetzt wird,

$$dm = \frac{a}{\lambda}\cdot\frac{b}{\mu}\left(1+\frac{1^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot\frac{c}{\nu}\left(1+\frac{1^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(1-\frac{1^\beta}{\mu^\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

und daher das erste Integral, da $\frac{l^2a^2}{\lambda^2}$ statt x^2 zu setzen ist und α, β, γ gerade sind,

$$a^3bc\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} dx\,dy\,dz\,x^2\,(1-x^\alpha)^{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}(1-y)^{\frac{1}{\gamma}} = 8a^3bc\int_0^1 x^2\,(1-x^\alpha)^{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}\,dx\int_0^1 dy\,(1-y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$= \frac{8a^3bc}{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+1\right)}$$

Für das Ellipsoid erhält man

$$\int x^2 dm = a^3bc\,\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\,(\Gamma\frac{1}{2})^2}{\Gamma(2+\frac{1}{2})} = a^3bc\,\frac{\pi\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{4}{15}a^3bc\pi = \frac{a^2}{5}E$$

Ebenso findet man natürlich

$$\int y^2 dm = \frac{b^2}{5}E \text{ und } \int z^2 dm = \frac{c^2}{5}E$$

Ueberhaupt sieht man aus dieser Darstellung, daß sich alle Integrale von der Form

$$\int x^p y^q z^r dm$$

mit derselben Leichtigkeit berechnen lassen, wie diese einfacheren, wenn an die Stelle von x, y, z die Ausdrücke treten

$$\frac{la}{\lambda};\ \frac{mb}{\mu}\left(1-\frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}};\ \frac{nc}{\nu}\left(1-\frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(1-\frac{m^\beta}{\mu^\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

und, im Falle sich das Integral über den ganzen Octanten ausdehnen soll, die l, m, n entsprechend alle ganze Werthe von 0 bis $\lambda-1$, 0 bis $\mu-1$ und 0 bis $\nu-1$ erhalten. Das Massen- oder Volumenelement behält den oben angegebenen Werth.

Sollte die Oberfläche des Octanten berechnet werden, so bildet man sich zunächst das Oberflächenelement, indem man dxdy oder hier

$$\frac{a}{\lambda}\cdot\frac{b}{\mu}\left(1-\frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

durch den Cosinus des Winkels dividirt, den die Normale des Punktes xyz mit der Axe der z bildet. Dieser Cosinus ist bekanntlich

$$\frac{\frac{\gamma}{c}\left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma-1}}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2}\left(\frac{x}{a}\right)^{2\alpha-2}+\frac{\beta^2}{b^2}\left(\frac{y}{b}\right)^{2\beta-2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\left(\frac{z}{c}\right)^{2\gamma-2}}}$$

und in unserem Falle treten

$$\frac{1}{\lambda}; \frac{m}{\mu}\left(1-\frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}; \left(1-\frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(1-\frac{m^\beta}{\mu^\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

an die Stelle von

$$\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$$

Der Inhalt Q des Octanten wird auf diese Weise

$$Q=\frac{abc}{\gamma}\int_0^1\int_0^1 dx\,dy\,\frac{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2}x^{2\alpha-2}+\frac{\beta^2}{b^2}y^{2\beta-2}(1-x^\alpha)^{2-\frac{2}{\beta}}+\frac{\gamma^2}{c^2}(1-x^\alpha)^{2-\frac{2}{\gamma}}(1-y^\beta)^{2-\frac{2}{\gamma}}}}{(1-x^\alpha)^{1-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}}(1-y^\beta)^{1-\frac{1}{\gamma}}}$$

Für $x^\alpha=\sin^2\varphi$ und $y^\beta=\sin^2\psi$ ergiebt sich

$$Q=\frac{4abc}{\alpha\beta\gamma}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\,\frac{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2}\sin\varphi^{4-\frac{4}{\alpha}}+\frac{\beta^2}{b^2}(\cos\varphi\sin\psi)^{4-\frac{4}{\beta}}+\frac{\gamma^2}{c^2}(\cos\psi\cos\psi)^{4-\frac{4}{\gamma}}}}{\sin\varphi^{1-\frac{2}{\alpha}}\cos\varphi^{1-\frac{2}{\beta}-\frac{2}{\gamma}}\sin\psi^{1-\frac{2}{\beta}}\cos\psi^{1-\frac{2}{\gamma}}}$$

Für das Ellipsoid erhält man die bekannte Formel

$$Q=abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\cos\varphi\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\psi\cos^2\varphi}{b^2}+\frac{\cos^2\psi\cos^2\varphi}{c^2}}$$

Drückt man nach dieser Zerlegungsweise die Anziehung aus, welche eine Kugel nach dem Newtonschen Gesetze auf einen Punkt ausübt, so gelangt man durch Vergleichung mit dem bekannten Resultate zu dem Doppelintegrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\pi}d\psi\,\frac{\cos\psi\cos^2\varphi}{\sqrt{1+n^2-2n\cos\varphi\cos\psi}}$$

welches, für $n>1$, gleich $\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{n^2}$ und für $n<1$, gleich $\frac{\pi}{3}\cdot n$ ist. Der letzte Werth ergiebt sich sogleich aus dem ersten, wenn man $\frac{1}{n}$ statt n setzt.

V.

Die einfachsten periodischen Functionen.

§. 1.

Bezeichnet man das Product von Functionen

$$f(x-n)f(x-n+1)f(x-n+2)\ldots f(x-1)f(x)f(x+1)\ldots f(x+n-2)f(x+n-1)f(x+n)$$

durch das leicht verständliche Zeichen

$$\prod_{-n}^{n} f(x+\lambda)$$

so ist offenbar, wenn μ eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet,

$$\prod_{-n}^{n} f(x+\lambda) = \prod_{-n-\mu}^{n-\mu} f(x+\mu+\lambda)$$

und daher, wenn μ nicht selbst unendlich groß ist,

$$\prod_{-\infty}^{\infty} f(x+\lambda) = \prod_{-\infty}^{\infty} f(x+\mu+\lambda) \qquad (1)$$

oder kurz

$$F(x) = F(x+\mu).$$

Es ist also $F(x)$ eine Function, welche ihren Werth nicht ändert, wenn x um irgend eine ganze Zahl zu- oder abnimmt. Unter dieser Zahl denken wir uns am bequemsten die Einheit. Man kennt also die Function $F(x)$ vollständig, sobald nur alle die Aenderungen bekannt sind, die sie erfährt, während x von 0 bis 1 wächst. Eine Function von dieser Beschaffenheit wird ganz passend eine periodische Function genannt. Zu jedem bestimmten Werthe von x gehört nur ein bestimmter Werth der Function, aber ein gegebener Werth der Function wird durch unendlich viele von einander verschiedene Werthe von x hervorgebracht.

Durch ähnliche Betrachtungen überzeugt man sich, daß auch

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(x+s)$$

eine periodische Function ist und ebenfalls

eine solche sein würde, wenn $a^n = 1$ wäre, für irgend einen für x erreichbaren Werth von n, ohne daß a deswegen der Einheit gleich sein müßte. Der Gedanke an die letzte Function liegt weniger nah, aber sie selbst, so wie die vorhergehende, lassen sich auf die erste zurückführen.

Die einfachste periodische Function würde man aus (1) für $f(x) = x$ erhalten, aber ein solches Product

$$\prod_{-\infty}^{\infty}(x+\lambda)$$

ist seiner Natur nach unendlich groß, sobald x keine ganze Zahl ist, und kann daher keiner Untersuchung unterworfen werden. Die einfachste Form, welche einer solchen Untersuchung fähig ist, ist

$$\prod_{-\infty}^{\infty}\frac{x+\lambda}{a+\lambda} = F(x)$$

wo a eine Constante ist, die offenbar keine ganze Zahl sein darf. Wir setzen hier voraus, daß man bei einem solchen unendlichen Producte das mittelste Glied zuerst nimmt und dann zur weitern Berechnung eine gleiche Anzahl gleich weit von beiden Seiten abstehender Factoren anwendet.

Es ist nun

$$\prod_{-n}^{n}\frac{x+\lambda}{a+\lambda} = \prod_{-n-1}^{n-1}\frac{x+1+\lambda}{a+1+\lambda} = \frac{a-n-1}{a+n}\prod_{-n-1}^{n-1}\frac{x+1+\lambda}{a+\lambda}$$

$$\text{also } \prod_{-\infty}^{\infty}\frac{x+\lambda}{a+\lambda} = -\prod_{-\infty}^{\infty}\frac{x+1+\lambda}{a+\lambda}$$

oder

$$F(x+1) = -F(x)$$

Setzt man hier $x+1$ statt x, so erhält man

$$F(x+2) = -F(x+1) = F(x).$$

Ferner ist

$$F(x) = \prod_{-\infty}^{\infty}\frac{x+\lambda}{a+\lambda} = \prod_{-\infty}^{-1}\frac{x+\lambda}{a+\lambda}\cdot\frac{x}{a}\prod_{1}^{\infty}\frac{x+\lambda}{a+\lambda} = \frac{x}{a}\prod_{\infty}^{1}\frac{x-\lambda}{a-\lambda}\prod_{1}^{\infty}\frac{x+\lambda}{a+\lambda} = \frac{x}{a}\prod_{1}^{\infty}\frac{x^2-\lambda^2}{a^2-\lambda^2}$$

für $-x$ statt x ergiebt sich also

$$F(-x) = -F(x)$$

Endlich wird hiernach für $x-\frac{1}{2}$ statt x aus der vorletzten Gleichung

$$F(\tfrac{1}{2}+x) = -F(x-\tfrac{1}{2}) = F(\tfrac{1}{2}-x)$$

Es ist also $F(x)$ eine periodische Function von x, welche alle mögliche Werthen durchläuft, während x von 0 bis 2 wächst, aber nach der letzten Formel braucht man diese Function nur von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}$ zu kennen, denn während x von $\frac{1}{2}$ bis 1 wächst, nimmt sie dieselben Werthe an, welche sie erhält, während x von $\frac{1}{2}$ bis 0 abnimmt. Da aber $F(x+1) = -F(x)$, so wiederholen sich jetzt, während x von 1 bis 2 wächst, alle die Werthe der Function, welche sie angenommen hatte, während x von 0 bis 1 wuchs.

Offenbar ist $F(0) = 0$

Der Werth von $F(\frac{1}{2})$ kann willkürlich angenommen werden; am einfachsten setzt man ihn der Einheit gleich, so daß

$$F(\tfrac{1}{2}) = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}+\lambda}{a+\lambda} = 1$$

wodurch sich die Constante a als $\frac{1}{2}$ ergiebt.

Diese Function wollen wir nun durch $\varphi(x)$ bezeichnen, so daß

$$\varphi(x) = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{x+\lambda}{\frac{1}{2}+\lambda} = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+2\lambda}{1+2\lambda}$$

und $\varphi(0) = 0$; $\varphi(\frac{1}{2}) = 1$; $\varphi(-x) = -\varphi(x)$; $\varphi(x \pm 1) = -\varphi(x)$; und allgemeiner $\varphi(2n \pm x) = \pm \varphi(x)$; $\varphi(2n+1 \pm x) = \mp \varphi(x)$, wenn n eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

§. 2.

Von der Function $\varphi(x)$ läßt sich ein constanter Factor absondern, da

$$\varphi(x) = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+2\lambda}{1+2\lambda} = \prod_{-\infty}^{-1} \frac{2(x+\lambda)}{1+2\lambda} \cdot 2x \prod_{1}^{\infty} \frac{2(x+\lambda)}{1+2\lambda} = 2x \prod_{1}^{\infty} \frac{2(\lambda-x)}{2\lambda-1} \cdot \frac{2(\lambda+x)}{2\lambda+1}$$

$$= 2x \prod_{1}^{\infty} \frac{4\lambda^2}{4\lambda^2-1}\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2}\right) = 2 \prod_{1}^{\infty} \frac{4\lambda^2}{4\lambda^2-1} \cdot x \prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2}\right)$$

Der auf diese Weise hervorgetretene Coefficient soll der Kürze wegen durch den Buchstaben π bezeichnet werden, so daß

$$\pi = 2 \prod_{1}^{\infty} \frac{4\lambda^2}{4\lambda^2-1}$$

Die Zahl π ist also offenbar größer als 2. Man kann aber auch die Factoren anders gruppiren und schreiben

$$\pi = 2\prod_1^\infty \frac{2\lambda}{2\lambda-1}\prod_1^\infty \frac{2\lambda}{2\lambda+1} = 4\prod_1^\infty \frac{2(\lambda+1)}{2\lambda+1}\prod_1^\infty \frac{2\lambda}{2\lambda+1} = 4\prod_1^\infty \frac{4\lambda^2+4\lambda}{4\lambda^2+4\lambda+1}$$

woraus erhellt, daß π kleiner als 4 ist. Auf diese Weise hat man π zwischen die beiden Grenzen 2 und 4 eingeschlossen. Schreibt man die beiden für π gefundenen Producte nieder, so erhält man

$$\pi = 2\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{36}{35}\cdot\frac{64}{63}\cdot\frac{100}{99}\cdot\frac{144}{143}\cdots$$

$$\pi = 4\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{48}{40}\cdot\frac{80}{81}\cdot\frac{120}{121}\cdot\frac{168}{169}\cdots$$

Werden beide Producte mit einander multiplicirt, indem man von beiden eine gleiche Anzahl Factoren anwendet, so giebt die Quadratwurzel aus diesem Producte für π den Werth

$$\pi = 2\sqrt{(2n+1)(2n+2)}\left\{\prod_1^n \frac{2\lambda}{2\lambda+1}\right\}^2 \text{ für } n=\infty$$

Nimmt man hier $n=15$, so findet man

$$\pi = 3{,}1408$$

ein Werth, der nur um 0,0007 zu klein ist. Die Function $\varphi(x)$ läßt sich nun so darstellen:

$$\varphi(x) = \pi x\prod_1^\infty\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2}\right)$$

§. 3.

Das Complement der Function $\varphi(x)$ soll durch $\psi(x)$ bezeichnet werden, d. h. man setze

$$\varphi(\tfrac{1}{2}-x) = \psi(x)$$

Dann ist also

$$\psi(x) = \prod_{-\infty}^\infty \frac{\lambda+\frac{1}{2}-x}{\lambda+\frac{1}{2}} = \prod_{-\infty}^\infty\left(1-\frac{2x}{2\lambda+1}\right) = \prod_{-\infty}^{-1}\left(1-\frac{2x}{2\lambda+1}\right)\prod_0^\infty\left(1-\frac{2x}{2\lambda+1}\right)$$

$$= \prod_1^\infty\left(1+\frac{2x}{2\lambda-1}\right)\prod_1^\infty\left(1-\frac{2x}{2\lambda-1}\right)$$

oder

$$\psi(x) = \prod_{-\infty}^\infty\left(1-\frac{2x}{2\lambda-1}\right) = \prod_1^\infty\left(1-\left(\frac{2x}{2\lambda-1}\right)^2\right)$$

Hiernach hat die Function $\psi(x)$ folgende Eigenschaften:

$$\psi(0) = 1;\ \psi(\tfrac{1}{2}) = 0;\ \psi(-x) = \psi(x);\ \psi(x) = \psi(\tfrac{1}{2} \pm x);\ \psi(2n \pm x) = \psi(x);$$
$$\psi(2n+1 \pm x) = -\psi(x)$$

Vergleicht man beide Functionen

$$\varphi(x) = \pi x \prod_1^\infty \left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2}\right) \text{ und } \psi(x) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{4x^2}{(2\lambda-1)^2}\right)$$

so erhellt, daß $\varphi(x)$ einen Factor mehr hat als $\psi(x)$.

§. 4.

Da $\psi(x) = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{2(x+\lambda)}{1+2\lambda}$ und $\psi(x-a) = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{2(x+a+\lambda)}{1+2\lambda}$ so ist

$$\frac{\varphi(x+a)}{\varphi(x)} = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{x+a+\lambda}{x+\lambda}$$

Wenn nun in einem solchen Producte für λ zwar alle ganze Zahlen gesetzt werden sollen, welche die Grenzen des Productzeichens angeben, nur die ganze Zahl z nicht, so wollen wir dieß durch

$$\lambda \mid z$$

bezeichnen, so daß also

$$\frac{\varphi(x+a)}{\varphi(x)} = (x+a) \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{x+a+\lambda \mid 0}{x+\lambda}$$

Das hier angedeutete Product enthält also im Nenner einen Factor mehr als im Zähler, kann daher in Partialbrüche aufgelöst werden, indem man setzt

$$\prod_{-\infty}^{\infty} \frac{x+a+\lambda \mid 0}{x+\lambda} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_s}{x-s}$$

und die verschiedenen Zähler α_s bestimmt. Zu dem Zwecke denken wir uns beide Seiten der Gleichung mit irgend einem der Nenner der Partialbrüche multiplicirt, also etwa mit $x-s$, und dann $x=s$ gesetzt, so erhalten wir offenbar

$$\alpha_s = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{s+a+\lambda \mid 0}{s+\lambda \mid -s} = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{a+\lambda \mid s}{\lambda \mid 0} = \frac{1}{a+s} \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{a+\lambda}{\lambda \mid 0} = \frac{1}{a+s} \prod_{-\infty}^{-1} \frac{a+\lambda}{\lambda} : a \prod_1^\infty \frac{a+\lambda}{\lambda}$$

$$= \frac{a}{a+s} \prod_1^\infty \frac{\lambda^2 - x^2}{\lambda^2} = \frac{\pi a}{\pi(a+s)} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{a^2}{\lambda^2}\right) = \frac{\varphi(a)}{\pi(a+s)}$$

Durch diesen Werth von q erhält man

$$\frac{\varphi(x+a)}{\varphi(x)} = (x+a)\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(a)}{\pi(a+s)(x-s)} = \frac{\varphi(a)}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{a+s}+\frac{1}{x-s}\right\}$$

Für $a = \frac{1}{2}$ ist

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}+s} = \sum_{-\infty}^{-1}\frac{2}{1+2s}+\sum_{0}^{\infty}\frac{2}{1+2s} = -\sum_{1}^{\infty}\frac{2}{2s-1}+\sum_{0}^{\infty}\frac{2}{2s+1} = -\sum_{0}^{\infty}\frac{2}{2s+1}+\sum_{0}^{\infty}\frac{2}{2s+1} = 0$$

also

$$\frac{\varphi(x+\frac{1}{2})}{\varphi x} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi(\frac{1}{2})}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x-s} = \frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x+s}$$

Eben so ist

$$\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a+s} = \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}$$

daher wird

$$\frac{\varphi(x+a)}{\varphi(x)} = \varphi(a)\left\{\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}+\frac{\psi(a)}{\varphi(a)}\right\}$$

oder

$$\varphi(x+a) = \varphi(a)\,\psi(x)+\varphi(x)\,\psi(a)$$

§. 5.

Setzt man in der zuletzt gefundenen Gleichung, erst $-a$ statt a, dann, in der so gebildeten, $\frac{1}{2}-x$ statt x und endlich in der letzten ebenfalls $-a$ statt a, so hat man im Ganzen folgende vier Formeln gewonnen

$$\begin{aligned}
\varphi(x+a) &= \varphi(x)\,\psi(a)+\varphi(a)\,\psi(x)\\
\varphi(x-a) &= \varphi(x)\,\psi(a)-\varphi(a)\,\psi(x)\\
\psi(x+a) &= \psi(x)\,\psi(a)-\varphi(a)\,\varphi(x)\\
\psi(x-a) &= \psi(x)\,\psi(a)+\varphi(a)\,\varphi(x)
\end{aligned}$$

§. 6.

Aus der letzten dieser Formeln erhält man, für $a = x$,

$$(\psi x)^2+(\varphi x)^2 = 1$$

und durch ganz leichte Transformationen noch folgende vier Ausdrücke

$$\varphi(x)+\varphi(y)=2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\varphi(x)-\varphi(y)=2\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\psi(x)+\psi(y)=2\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\psi(x)-\psi(y)=2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\varphi\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

Da nach §. 2.

$$\frac{\varphi(0)}{0}=\pi$$

so ergiebt sich aus der zweiten dieser Gleichungen, wenn man $x=y+dy$ setzt,

$$\frac{\varphi(y+dy)-\varphi(y)}{dy}=\frac{\varphi\left(\frac{dy}{2}\right)}{\frac{dy}{2}}\psi\left(y+\frac{dy}{2}\right)$$

oder

$$\frac{d\varphi(y)}{dy}=\pi\psi(y)$$

Nimmt man hier y gleich $\frac{1}{2}-x$ an, so erhält man zugleich

$$\frac{d\psi(x)}{dx}=-\pi\varphi(x)$$

Durch Hülfe dieser Differenzialquotienten lassen sich nun die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ nach dem Taylorschen Satze in Reihen entwickeln, die nach steigenden Potenzen von x fortschreiten. Diese Entwicklung setzt aber bekanntlich die Kenntniß der Differenzialrechnung nicht nothwendig voraus wie, der Vollständigkeit wegen, im folgenden § gezeigt werden soll.

§. 7.

Da nach §. 2. $\varphi(x)$ nur ungerade Potenzen von x in seiner Entwicklung enthalten kann, so setzen wir

$$\varphi(x)=\sum_0^\infty a_n x^{2n+1}$$

also

$$\varphi(y)=\sum_0^\infty a_n y^{2n+1}$$

daher

$$\varphi(x)-\varphi y)=2\,\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sum_0^\infty a_n(x^{2n+1}-y^{2n+1})$$

oder $$\frac{\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\frac{x-y}{2}}\,\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sum_0^\infty a_s\frac{x^{2s+1}-y^{2s+1}}{x-y}$$

Für $x=y$ erhält man hieraus

$$\pi\psi(x)=\sum_0^\infty a_s(2s+1)x^{2s}$$

folglich $$\pi\psi(y)=\sum_0^\infty a_s(2s+1)y^{2s}$$

und daher

$$\pi\left(\frac{\psi(x)-\psi(y)}{x-y}\right)=-\pi\frac{\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\frac{y-x}{2}}\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sum_0^\infty a_s(2s+1)\,\frac{x^{2s}-y^{2s}}{x-y}$$

Für $x=y$ ergiebt sich hieraus

$$\pi^2\varphi(x)=-\sum_0^\infty a_s 2s(2s+1)\,x^{2s-1}=-\sum_0^\infty a_{s+1}(2s+2)\,(2s+3)x^{2s+1}$$

Die Vergleichung dieser Formel mit dem zuerst angenommenen liefert die Gleichung

$$a_{s+1}(2s+2)\,(2s+3)=-\pi^2 a_s$$

oder auch $$2s\,(2s+1)\,a_s=-\pi^2 a_{s-1}$$

Ferner ist hiernach $$(2s-2)\,(2s-1)\,a_{s-1}=-\pi^2 a_{s-2}$$

$$(2s-4)\,(2s-3)\,a_{s-2}=-\pi^2 a_{s-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\cdot 3\,a_1=-\pi^2 a_0=-\pi^2\pi$$

Bezeichnet man nun

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots n \text{ durch } (1,+1)^n$$

so giebt die Multiplication aller dieser Gleichungen

$$a_s=\frac{(-1)^s\pi^{2s+1}}{(1,+1)^{2s+1}}$$

also

$$\varphi(x)=\sum_0^\infty\frac{(-1)^s(\pi x)^{2s+1}}{(1,+1)^{2s+1}}\text{ und }\psi(x)=\sum_0^\infty\frac{(-1)^s(\pi x)^{2s}}{(1,+1)^{2s}}$$

Diese Reihen nehmen eine einfachere Gestalt an, wenn man x statt πx setzt, denn man erhält dann

$$\varphi\left(\frac{x}{\pi}\right) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s+1}}{(1,+1)^{2s+1}} = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots$$

$$\psi\left(\frac{x}{\pi}\right) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{(1,+1)^{2s}} = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots$$

§. 8.

Die Functionen $\varphi\left(\frac{x}{\pi}\right)$ und $\psi\left(\frac{x}{\pi}\right)$ sind bekanntlich durch $\sin x$ und $\cos x$ bezeichnet worden, so daß also

$$\varphi(x) = \sin \pi x \text{ und } \psi(x) = \cos \pi x$$

gesetzt werden müssen. Benutzt man jetzt diese Zeichen, so erhält man

$$\sin \pi x = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{2(x+\lambda)}{1+2\lambda} \text{ und } \cos \pi x = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{2\left(\frac{1}{2} - x + \lambda\right)}{1+2\lambda} = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{1-2x+2\lambda}{1+2\lambda}$$

also

$$\frac{\cos \pi x(1-a)}{\sin \pi x} = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{1-2x+2ax+2\lambda}{2x+2\lambda} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^s}{x+s}$$

Da nach §. 3 $\sin \pi x$ einen Factor mehr enthält als $\cos \pi x$ so brauchte hier nicht, wie in §. 4 geschah, im Zähler ein Factor abgesondert zu werden, um das Product in Partialbrüche zerlegen zu können. Ganz wie in §. 4 ergiebt sich auch hier

$$\alpha_s = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{1-2s+2as+2\lambda}{2s+2\lambda\,!\,-s} = \frac{1}{2} \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2as+2\lambda}{2\lambda\,!\,0} = \frac{1}{2} \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2as+2\lambda}{2\lambda+1} \cdot \frac{2\lambda+1}{2\lambda\,!\,0}$$

Nun ist

$$\pi = 2 \prod_{1}^{\infty} \frac{2\lambda}{2\lambda-1} \prod_{1}^{\infty} \frac{2\lambda}{2\lambda+1} = 2 \prod_{-1}^{-\infty} \frac{2\lambda}{2\lambda+1} \prod_{1}^{\infty} \frac{2\lambda}{2\lambda+1} = 2 \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{2\lambda\,!\,0}{2\lambda+1}$$

daher wird

$$\alpha_s = \frac{1}{\pi} \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2as+2\lambda}{2\lambda+1} = \frac{1}{\pi} \cos \pi as$$

Es ist also

$$\frac{\cos \pi x(1-a)}{\sin \pi x}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos s\pi a}{x-s} = \frac{1}{\pi} \left\{ \cdots \frac{\cos 3\pi a}{x-3} + \frac{\cos 2\pi a}{x-2} + \frac{\cos \pi a}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{\cos \pi a}{x+1} + \frac{\cos 2\pi a}{x+2} + \frac{\cos 3\pi a}{x+3} + \cdots \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{x} + \frac{2\cos \pi a}{x^2-1} + \frac{2\cos 2\pi a}{x^2-4} + \frac{2\cos 3\pi a}{x^2-9} + \cdots \right\}$$

Diese Reihe läßt sich besser so schreiben:

$$\frac{\cos\pi x(1-a)}{\sin\pi x} = \frac{1}{\pi x} - \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\cos\pi a}{1-x^2} + \frac{\cos 2\pi a}{4-x^2} + \frac{\cos 3\pi a}{9-x^2} + \ldots\right\}$$

und gilt offenbar nur für positive a und nur so lange als x kleiner als 1 ist. Uebrigens ergeben sich diese Reihen durch keine der bekannten Entwicklungsweisen mit derselben Leichtigkeit. Auch die Formeln des §. 4, welche zur Entwicklung des Hauptsatzes in der Theorie dieser Functionen benutzt wurden, bilden an und für sich schon sehr nützliche und bekannte Reihen.

§. 8.

Nachdem in §. 5. die Formeln gefunden worden sind

$$\varphi(x+a) = \varphi(x)\,\psi(a) + \varphi(a)\,\psi(x)$$
$$\psi(x+a) = \psi(x)\,\psi(a) - \varphi(a)\,\varphi(x)$$

muß sogleich beachtet werden, daß sich beide in eine einzige zusammenziehen lassen, nämlich, wenn man $\sqrt{-1}$ durch i bezeichnet, in

$$\psi(x+a) + i\varphi(x+a) = (\psi(x) + i\varphi(x))\,(\psi(a) + i\varphi(a))$$

oder wenn wir lieber die bekannten Zeichen benutzt

$$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\,(\cos\beta + i\sin\beta)$$

woraus dann sogleich für positive ganze n folgt

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha \qquad (1)$$

Da

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

so ist

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \frac{\cos^2 n\alpha + \sin^2 n\alpha}{\cos n\alpha - i\sin n\alpha} = \frac{1}{\cos n\alpha - i\sin n\alpha}$$

also

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-n} = \cos n\alpha - i\sin n\alpha$$

so daß also (1) auch für negative ganze n gilt. Endlich erhält man noch aus (1)

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m = (\cos n\alpha + i\sin n\alpha)^{\frac{m}{n}} = \cos m\alpha + i\sin m\alpha$$

Für $\alpha = \frac{\beta}{n}$ ist hiernach

$$(\cos\beta + i\sin\beta)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}\beta + i\sin\frac{m}{n}\beta$$

so daß also (1) für positive und negative, ganze und gebrochene n gilt.

Setzt man nun $n\alpha = 2\pi$, so folgt aus (1)

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

Man ist also zu einer Function gelangt, welche die merkwürdige Eigenschaft hat, daß ihre nte Potenz die Einheit giebt.

Setzt man jetzt Kürze halber $\frac{2\pi}{n} = x$, so wird

$$(\cos x + i \sin x)^{\frac{2\pi i}{x}} = 1$$

oder wenn man $\frac{x}{i}$ statt x einführt, und für $\cos\frac{x}{i}$ und $\sin\frac{x}{i}$ die entsprechenden Reihen setzt,

$$\left(\cos\frac{x}{i} + i\sin\frac{x}{i}\right)^{\frac{2\pi i}{x}} = \left(1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots\right)^{\frac{2\pi i}{x}} = 1$$

Die Klammer ist eine bestimmte Function von x, welche durch $\chi(x)$ bezeichnet werden mag, so daß

$$1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots = \chi(x)$$

und $$(\chi(x))^{\frac{2\pi i}{x}} = 1$$

für $x = 1$ findet man

$$\chi(1) = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots = 2{,}71828\ldots = e \text{ u. s. w.}$$

Es ist also $$e^{2\pi i} = 1 \text{ oder } e^{x\frac{2\pi i}{x}} = 1 = (\chi(x))^{\frac{2\pi i}{x}}$$

daher $$\chi(x) = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots = e^x$$

für ein positives oder negatives ganzes n ist folglich

$$e^{2n\pi i} = 1$$

Wir sind auf diese Weise zu einer neuen periodischen Function gelangt, deren Existenz in §. 1. schon angedeutet wurde; aber diese Function hat eine imaginäre Periode, denn es ist $$e^{x + 2n\pi i} = e^x e^{2n\pi i} = e^x$$

Setzt man aber lieber $$f(x) = e^{2\pi i x}$$

so ist $$f(x + n) = e^{2\pi i(x+n)} = e^{2\pi i x} = f(x)$$

Da offenbar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \text{ für } m = \infty$$

so kann auch $$f(x) = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

als periodische Function betrachtet werden, denn es ist

$$f(x + 2n\pi i) = \left(1 + \frac{x + 2n\pi i}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = f(x)$$

Den hier benutzten Methoden der Entwicklung hätte leicht eine strengere Form gegeben werden können, wenn man nicht gleich eine unendliche Anzahl von Factoren in die Rechnung eingeführt hätte, sondern von einer endlichen Zahl auf eine beliebig große übergegangen wäre.

Prof. Schellbach.

Fig. 1.

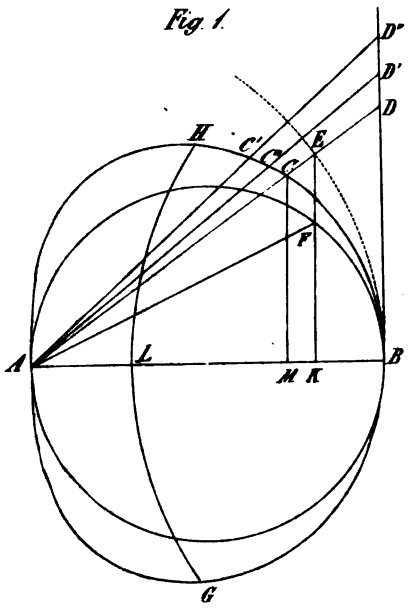


Fig. 2.

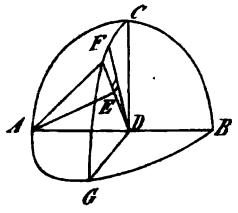


Fig. 3.

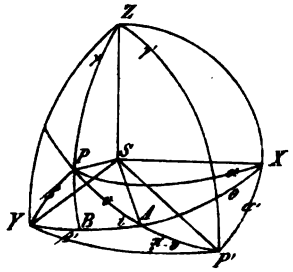


Fig. 4.

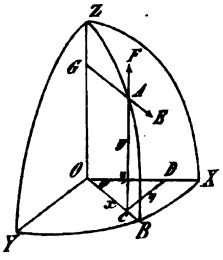
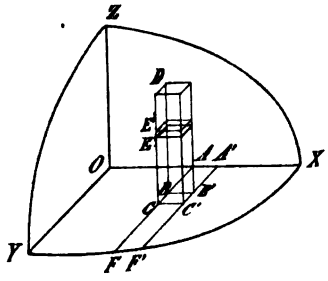


Fig. 5.



Schulnachrichten

von Michaelis 1844 bis dahin 1845.

A. Allgemeine Lehrverfassung des Gymnasiums.

Oberprima.

Ordinarius der Director.

Lateinisch. Hor. Carmm. mit Auswahl, einige Satiren, Briefe und Ars poetica. 2 St. Die freien latein. Aufsätze. 1 St. Zus. 3 St. Der Director.

Im Winter: Tacit. Annal. Lib. II. und ein Theil des dritten (die Biogr. des Agricola als Privatlectüre); dann Cic. Epist. Im Sommer: Tacit. Hist. I. und ausgewählte Abschnitte aus den folgenden Büchern. Dann Cic. de natura deorum mit Auswahl. 3 St. Lat. Exercitia und Extemporalia. 2 St. Zus. 5 St. Professor Böttticher.

Griechisch. Im Winter: Homer, B. 22—24. Im Sommer: Sophocles Electra. 2 St. Der Director.

Im Winter: Plat. Phaedo. Im Sommer: Demosth. Olynth. III. und Plat. Gorg. 4 St. Prof. Krem.

Deutsch. Censur der Aufsätze. Uebungen im mündlichen Vortrage. Geschichte der deutschen Nationalliteratur: 1740—1794. 2 St. Prof. Krem.

Hebräisch. Im Winter: Die erste Hälfte des Buches der Richter und Ps. 70—84. Im Sommer: Die zweite Hälfte des Buches der Richter und Ps. 1—10. Außerdem Exercitien und grammatische Commentare als häusliche Arbeiten. 2 St. Prof. Dr. Uhlemann.

Französisch. Im Winter: Molière's Tartuffe; im Sommer: Mignet histoire de la révolution française, Einleitung und erstes Buch. Exercitien und Extemporalien. 2 St. Prof. Haybemann.

Religion. Die Grundzüge der christlichen Glaubens- und Sittenlehre. 2 St. Der Director.

Geschichte. Geschichte der neueren Zeit vom Beginn der Reformation bis zum Jahre 1789; 3 St. Prof. Heydemann.

Mathematik. Im Winter: Sphärische Trigonometrie. Gleichungen. 4 St. Im Sommer: Mathematische Uebungen. Theorie der Reihen. 4 St. Prof. Schellbach.

Physik. Im Winter: Allgemeine Physik. Im Sommer: Elemente der Astronomie. 2 St. Prof. Schellbach.

Philosophische Propädeutik. Im Winter: Psychologie. Im Sommer: Logik (nach Trendelenburg's Kompendium der aristotelischen Logik). 1 St. Prof. Yrem.

Unterprima.

Ordinarius Professor Yrem.

Lateinisch. Im Winter: Sallust. bellum Catil., hierauf Cic. Philippicae, großentheils. Im Sommer: Die erste Hälfte des bellum Jugurth., dann Cic. de offic. lib. I. 3 St. Prof. Böttticher. Censur der lat. Aufsätze, Exercitia und Dolmastika; Einübung der wichtigsten Abschnitte der Syntax durch lat. Extemporalia; Einiges aus Rutilius Lupus de fig. sentent. und dem lat. Antibarbarus. 3 St. Ebenderselbe.

In beiden Halbjahren: Horat. carmm. lib. III. IV., epod. lib. mit Auswahl, dazu Satir. I., 6 u. 9. Viele der gelesenen und erklärten Gedichte wurden auswendig gelernt. 2 St. Prof. Bresemer.

Griechisch. Im Winter: Demosth. Phil. I. Olynth. I., II., III. Im Sommer: Olynth. III. beendigt. Plut. vit. Demosth. 3 St. Uebersetzung des Corn. Nep. in's Griechische. 1 St. Prof. Yrem. Im Winter: Homeri Ilias. I — VI; im Sommer: Lib. VII — XII. Prof. Böttticher.

Deutsch. Censur der Aufsätze. Uebungen im mündlichen Vortrage. Ueberblick der deutschen Litteratur-Geschichte von Ulphilas bis zu Gellerts ersten Fabeln. 3 St. Prof. Yrem.

Hebräisch. Mit Oberprima vereinigt.

Französisch. Wie Oberprima.

Religion. Die christliche Kirchengeschichte vom apostolischen Zeitalter bis zu Anfang der Reformation. 2 St. Prof. Dr. Uhlemann.

Geschichte. Wie Oberprima.

Mathematik. Im Winter: Mathematische Uebungen, Theorie der Reihen. 4 St. Im Sommer: Gleichungen. Kegelschnitte. 4 St. Prof. Schellbach.

Physik. Im Winter: Allgemeine Physik. Im Sommer: Elemente der Astronomie. 2 St. Prof. Schellbach.

Obersecunda.

Ordinarius Professor Bresemer.

Latein. In beiden Halbjahren: Cic. or. pro Sex. Rosc. Amerino, dazu aus Münter. ad Herennium lib. IV.; Livii lib. II. 4 St. Wiederholung einzelner Abschnitte der Grammatik, Stilübungen in Exercitien, Extemporalien, Anfertigung einzelner freier lateinischer Aufsätze.

passende Stellen aus der gelesenen Schriftstellern wurden auswendig gelernt. Uebungen im mündlichen Uebersetzen aus dem Deutschen nach Jumpt's Aufgaben. 3 St. Prof. Bresemer. Virgil. Aen. Lib. VI., VII. und ein Theil des achten Buchs. 2 St. Prof. Böttcher.

Griechisch. Im beiden Halbjahren: Hom. Odyss. lib. X. bis XX. excl. — Im Winter wurde lib. VII. bis X. privatim theils wiederholt, theils gelesen; die schönsten Stellen und Sprüche wurden auswendig gelernt. Arriani expod. Alex. lib. VI., von c. 18 bis VII. zu Ende. 4 St. Wiederholung des etymologischen Theiles der Grammatik, besonders der Lehre vom Verbum, Einübung der Regeln vom Gebrauch der Casus, Präpositionen, Genera Verbi, so wie der Hauptregeln über den Gebrauch der Modi in Exercitien und Extemporalien. 2 St. Prof. Bresemer.

Deutsch. Im Winter: Deutsche Aufsätze; Declamationen und Uebungen im freien Vortrag; Uebersicht der deutschen Litteratur-Geschichte von Luther bis zum Jahre 1740. 2 St. Dr. Rassow. Im Sommer: Deutsche Aufsätze, Declamationen und Uebungen im freien Vortrage. 2 St. Prof. Bresemer.

Hebräisch. Repetition der unregelmäßigen Zeitwörter nebst andern grammatischen Uebungen und das Buch Josuah. Exercitien und Auswendiglernen von Vokabeln als häusliche Arbeiten. 2 St. Prof. Dr. Uhlemann.

Französisch. Lectüre ausgewählter Abschnitte aus dem Handbuch der neueren französischen Sprache und Litteratur, von Büchner und Herrmann; Exercitien und Extemporalien. 2 St. Prof. Heydemann.

Religion. Im Winter: Die Leidensgeschichte, im Sommer: die katholischen Briefe nach dem Grundtexte; dabei wurden aus Luthers Catechismus einzelne Abschnitte wiederholt und mehrere der schönsten und bekanntesten Lieder des Berl. Gesangbuchs auswendig gelernt. 2 St. Prof. Böttcher.

Geschichte. Im Winter: Römische Geschichte von Augustus bis Diocletian; Orientalische Geschichte, und Griechische bis zu den Perserkriegen; im Sommer: Griechische Geschichte von den Perserkriegen bis zum Ende der Diadochenzeit. 3 St. Prof. Heydemann.

Mathematik. Die ebene Trigonometrie. Die Gleichungen der beiden ersten Grade mit einem und mit mehreren Unbekannten. Die unbestimmten Gleichungen des ersten Grades. 4 St. Prof. Schellbach.

Physik. Im Winter: Elemente der Chemie. Im Sommer: Magnetismus und Elektricität. 2 St. Prof. Schellbach.

Untersecunda.

Ordinarius Oberlehrer Drogan.

Lateinisch. In beiden Semestern: 1) Cic. pro Leg. Man. pro Arch. in Catil. I. pro Mil. (zum Theil). 3 St. 2) Virg. Aen. III., IV., V. (das letztere cursor.). IV., 1—237 memorirt. 3 St. 3) Wiederholung einzelner Abschnitte aus der Syntax und Casuslehre. Exercitia und Extemporalia. Memoriren einzelner Abschnitte aus Cicero. 4 St. Oberl. Drogan.

Griechisch. 1) Wiederholung der regelmäßigen Declination und Conjugation der Verba

in μι und die unregelmäßigen Verba nach Buttmann. Exercitia und Extemporalia. 2 St. Hom. Odys. VII., VIII., IX., X., XI. (zum Theil). Auswendig gelernt IX., 1—36. Arr. exp. Alex. lib. II. 1—20. 4 St. Oberl. Drogan.

Deutsch. Deutsche Aufsätze, Declamiren und Uebungen im freien Vortrage. 2 St. Oberl. Drogan.

Hebräisch. Jedes Semester ein vollständiger grammatischer Cursus bis zum unregelmäßigen Zeitworte nebst Einüben leichter grammatischer Sätze. Außerdem Auswendiglernen von Vokabeln und leichte schriftliche Exercitien als häusliche Arbeiten. 2 St. Prof. Dr. Uhlemann.

Französisch. Wie Obersecunda.

Religion. Im Winter: Die Reden der Apostelgeschichte erklärt mit Hinzunahme des griechischen Textes. Im Sommer: Leichtere Stellen der paulinischen Briefe über einzelne Glaubenslehren erklärt und mit dem griechischen Texte verglichen. Außerdem Auswendiglernen biblischer Stellen und ausgewählter Kirchenlieder als häusliche Arbeiten. 2 St. Prof. Dr. Uhlemann.

Geschichte. Wie Obersecunda.

Mathematik. Die Lehre von den Potenzen und Logarithmen. Gleichungen des ersten Grades mit mehreren, und des zweiten Grades mit einer Unbekannten. 2 St. Die Lehre von der Berechnung des Flächeninhalts geradliniger Figuren, von der Aehnlichkeit und von der Ausmessung des Kreises. 2 St. Geometrische Aufgaben. 1 St. Dr. Luchterhandt.

Obertertia.

Ordinarius Oberlehrer Böhm.

Lateinisch. Caesar de bello civili lib. I—III. mündlich, und zum Theil auch schriftlich übersetzt. 4 St. Ranke's Chrestomathie. 2 St. Es wurden mehrere Stücke daraus auswendig gelernt, so wie aus Caesar de bello Gallico lib. VI. Cap. 13—18. Lateinische Syntax nach Zumpt Cap. 77—83, Repetition der Casuslehre, Extemporalien und Exercitien. 4 St. Zusammen 10 St. Oberl. Böhm.

Griechisch. Xenoph. Anabasis lib. I—III. 4 St. In der Grammatik wurden die verba auf μι und anomala gelernt, und mündlich und schriftlich geübt. Wiederholung des früheren Pensums. 2 St. Zusammen 6 St. Oberl. Böhm.

Deutsch. Ausarbeitungen über vorher besprochene Themata und Uebungen im Declamiren. 2 St. Oberl. Böhm.

Französisch. Voltaire, histoire de Charles XII.; die wichtigsten syntaktischen Regeln wurden auswendig gelernt und durch Exercitien eingeübt; daneben Extemporalien. 2 St. Prof. Walter.

Religion. Im Winter: Repetition und Erklärung der Hauptstücke und das Evangelium des Lukas. Im Sommer: Kurze Uebersicht über das Leben der N. T. Schriftsteller und über den Inhalt ihrer Schriften und das Leben Jesu nach den Evangelien. Außerdem wurden biblische Stellen und ausgewählte Kirchenlieder auswendig gelernt. 2 St. Prof. Dr. Uhlemann.

Geschichte. Im Winter: Geschichte der Römer; im Sommer: das Mittelalter. 2 St. Prof. Walter.

Geographie. Europa nach seinen politischen Verhältnissen in einem jährigen Cursus. 2 St. Derselbe.

Mathematik. Arithmetik: Ausziehen der Quadratwurzel, Multiplication und Division algebraischer Summen; Gleichungen vom ersten Grade; Proportionen. 2 St. Geometrie. Gleichheit der Flächen geradliniger Figuren; die Lehre vom Kreise. 2 St. Dr. Luchterhandt.

Untertertia.

Ordinarius Oberlehrer Rehbein.

Lateinisch. Caesar de bello Gallico lib. 1—5. mündlich und schriftlich übersetzt. 3 St. Auswendig gelernt wurden aus lib. 6. Cap. 13—21 wöchentl. 1 St.; Wiederholung des Datumes. 1 St. — Einübung der Casuslehre nach Zumpt Cap. 69 — 76, so wie das Hauptsächlichste vom Gebrauch der Modi aus Cap. 78, 79, 80 in mündlichen Uebungen, Exercitien und Extemporalien. 4 St. Oberl. Rehbein. — Ranke's Chrestomathie. 1 St. Dr. Dittrich. — Zusammen 10 St.

Griechisch. Wiederholung des Pensum's von Quarta. 1 St. Dr. Dittrich. — Einübung des regelmäßigen Verbums nach Buttmann durch mündliche und schriftliche Uebungen. Gelesen wurde aus Jacob's Elementarbuche S. 111—137. 5 St. Oberl. Rehbein.

Deutsch. Uebungen im Declamiren und Censur der Aufsätze (Erzählungen, Beschreibungen und Schilderungen); außerdem wurden einzelne passende Abschnitte aus der Grammatik durchgenommen. 2 St. Dr. Dittrich.

Französisch. Wiederholung des Pensums der vorigen Klasse und Einübung der unregelmäßigen Verba. Extemporalien. Gelesen wurden die schwereren Erzählungen der Herrmann'schen Grammatik. 2 St. Prof. Walter.

Religion. Erklärung des Evangeliums Lucä. Die wichtigsten Bibelstellen, namentlich die Bergpredigt Christi und ausgewählte Kirchenlieder wurden auswendig gelernt. Wiederholung des lutherischen Katechismus. 2 St. Oberl. Rehbein.

Geschichte. Im Winter: Geschichte der Römer; im Sommer: das Mittelalter. 2 St. Prof. Walter.

Geographie. Im Winter: Afrika und Amerika; im Sommer: Asien und Australien nach physischen und politischen Verhältnissen. 2 St. Derselbe.

Mathematik. Arithmetik: Repetition der Decimalbrüche und der Proportionsrechnung; Anfangsgründe der Algebra. 2 St. Geometrie: Dreiecke, Parallellinien, Parallelogramme, Gleichheit der Flächen geradliniger Figuren. 2 St. Dr. Luchterhandt.

Quarta.

Ordinarius im Winter: Oberlehrer Dr. Geisler, im Sommer: Coet. I. Derselbe, Coet. II. Gymnasiallehrer Dr. Strack.

Lateinisch. Cornel. Nepos, Eumenes, Phocion, Timoleon, De Regibus, Hamilcar, Hannibal, Cato mündlich und schriftlich übersetzt. 6 St. Datames wurde auswendig gelernt und daran die Casuslehre nach Zumpt eingeübt. 2 St. Wiederholung der ganzen Formenlehre und Einübung der unregelmäßigen Verba nach Zumpt. 1 St. Kandidat Hermann. Wöchentliche Exercitien und Extemporalien. 1 St. Zusammen 10 St. Oberl. Dr. Geisler.

Coet. II. Cornel. Nep. Datames, Miltiades, Themist., Arist., Pausan., Cimon mündlich

und zum Theil schriftlich übersetzt. Datames wurde wie in Coet. I. gelernt und benutzt. Wiederholung der ganzen Formenlehre. Wöchentl. Extemporalien nach Cornel. Zus. 10 St. Dr. Strack.

Griechisch. Formenlehre bis zum regelmäßigen Verbum inclus. nach Buttmann mündlich und schriftlich eingeübt. Uebersetzt wurde aus dem ersten Cursus des Elementarbuches von Jacobs I—VIII. und das Gelesene auswendig gelernt. 5 St. Oberlehrer Dr. Geisler. Coet. II. Dr. Strack.

Deutsch. Uebungen im Lesen, Deklamiren und mündlichen Wiedererzählen. Wöchentliche Aufsätze nach vorgelesenen Erzählungen. 2 St. Im Winter: Kand. Landsberg. Im Sommer: Kand. Hermann. (Oberlehrer Dr. Geisler). Coet. II. Dr. Dittrich.

Französisch. Der etymologische Theil der Grammatik, mit Ausschluß der unregelmäßigen Verba; Extemporalien. Gelesen wurden die Anekdoten und Erzählungen der Hermann'schen Grammatik. 2 St. Coet. I. Prof. Walter; Coet. II. Dr. Dittrich.

Religion. Luther's Katechismus wurde erklärt und auswendig gelernt; ebenso wöchentlich biblische Sprüche und Kirchenlieder. 2 St. Oberl. Dr. Geisler. Coet. II. Dr. Strack.

Geographie. Europa nach seinen physischen Verhältnissen in einem jährigen Cursus. 2 St. Prof. Walter.

Geometrie. Coet. I. Die Anfangsgründe der Geometrie 1 St.; im Winter Dr. Luchterhandt; im Sommer Kand. Hartrodt (Dr. Luchterhandt). Coet. II. Dr. Strack.

Rechnen. Coet. I. Decimalbrüche, Proportionsrechnung 2 St.; im Winter Dr. Luchterhandt; im Sommer Kand. Hartrodt (Dr. Luchterhandt). Coet. II. Dr. Strack.

Naturgeschichte. Terminologie. Demonstrationen lebender Pflanzen erläutert und Kenntniß des Linnéischen Sexual-Systems. 2 St. Oberl. Jacoby.

Zeichnen. Zeichnen nach krummlinigen Körpern und Anweisung zum Landschaftzeichnen in jedem Coet. 2 St. Lehrer Francke.

Quinta.

Ordinarius im Winter: Gymnasiallehrer Dr. Strack, im Sommer Gymnasiallehrer Rückert.

Lateinisch. Wiederholung des Pensums von Sexta; Einübung der Verba irregularia, des Acc. c. Inf. und der Abl. conseq. Uebersetzt und sowohl mündlich als schriftlich umgebildet wurden aus dem Tirocinium von O. Schulz die Stücke Nro. 70 bis 119, die Fabeln und die Erzählungen, sowie die entsprechenden Abschnitte aus der Militia v. Dr. Strack. Zus. 10 St., im Winter Dr. Strack, im Sommer Lehrer Rückert.

Deutsch. Lese- und Declamirübungen; Aufsätze nach vorgetragenen Erzählungen; die Lehre vom einfachen und zusammengesetzten Satze. 3 St. im Winter Dr. Strack; im Sommer Lehrer Rückert.

Französisch. Wiederholung des Pensums von Sexta; die regelmäßigen Conjugationen; das Leichtere aus der Lehre von den Pronoms. Uebersetzt wurden die acht ersten Erzählungen aus Hermann's Grammatik. 2 St. im Winter Dr. Strack; im Sommer Cand. Jänicke (Rückert).

Religion. Biblische Geschichte des A. und N. T. Erlernung mehrerer Lieder, der zehn Gebote und des Gebets des Herrn. 2 St. im Winter Dr. Strack; im Sommer Lehrer Rückert.

Geographie. Im Winter: Repetition der allgemeinen Erdkunde; das südwestliche Europa genauer. Dr. Strack. Im Sommer: Europa, namentlich in hydro- und orographischer Beziehung. 2 St. Lehrer Rückert.

Rechnen. Wiederholung der Bruchrechnung. Regel-de-tri. 4 St. im Winter Cand. Dr. Landsberg (Dr. Luchterhandt); im Sommer Cand. Dr. Emsmann (Dr. Luchterhandt).

Naturgeschichte. Die Käfer der Mark, an Exemplaren beschrieben, die von dem Lehrer und den Schülern gesammelt wurden. 2 St. Oberl. Jacoby.

Schreiben. Tactschreiben, Dictate und Vorübungen zum Schnellschreiben. 3 St. Lehrer Meyer.

Zeichnen. Zeichnen nach geradlinigen Körpern und Anfang des Zeichnens nach krummlinigen Körpern. 2 St. Lehrer Francke.

Sexta.

Ordinarius im Winter: Gymnasiallehrer Rückert; im Sommer: Gymnasiallehrer Gerber.

Lateinisch. Die Formenlehre bis zum regelmäßigen Verbum incl. ward nach dem Tirocinium durchgenommen und an den ersten 70 Stücken und den entsprechenden 140 der Militia eingeübt. Exercitia und Extemporalia. 10 St. Im Winter Lehrer Rückert. Im Sommer Lehrer Gerber.

Deutsch. Lehre von den Redetheilen, dem einfachen und dem einfach-erweiterten Satze. Schriftliche Uebungen mit besonderer Rücksicht auf Orthographie und den Gebrauch der Präpositionen. Lese- und Declamir-Uebungen. 4 St. Im Winter Lehrer Rückert. Im Sommer Lehrer Gerber.

Französisch. Die Anfangsgründe der französischen Sprache bis zur ersten Conjugation nebst Uebersetzungen und schriftlichen Uebungen aus Hermann's Grammatik Dr. Engel.

Religion. Biblische Geschichte des alten Testamentes bis zu den Makkabäern. Die 10 Gebote. Auswendiglernen passender Lieder. 2 St. Im Winter Lehrer Rückert. Im Sommer Lehrer Gerber.

Geographie. Hauptsächlich die Höhen und Tiefen der Erde, nebst Kartenzeichnen, und Extemporalien Dr. Engel.

Rechnen. Die vier Operationen mit Brüchen in unbenannten Zahlen. 4 St. Im Winter Cand. Landsberg. Im Sommer Lehrer Gerber.

Naturgeschichte. Beschreibung und Betrachtung verschiedener Säugethiere. Im Winter 2 St.; im Sommer 1 St. Oberl. Jacoby.

Schreiben. Uebungen der Current- und Cursivschrift nach des Lehrers Leitfaden. Zifferschreiben. Schreiben nach dem Tacte und Dictat-Uebungen. 6 St. Lehrer Meyer.

Zeichnen. Zeichnen gerad- und krummliniger Figuren und mannigfaltiger Verzierungen. 3 St. Lehrer Francke.

Gesang-Unterricht.

Erste Gesangklasse. Eine Stunde wöchentlich war dem Sopran, Eine dem Alt, Eine dem Tenor und Baß, Eine den vereinigten vier Stimmen bestimmt. Es wurden geübt: einige Chöre aus Athalia von Schulz, aus A. Romberg's Macht des Gesanges, aus Händels Messias, einige Motetten von J. M. Bach, Maria und Johannes von Schulz, Motetten von Haydn, und von Grell. In der Stunde für Männerstimmen Motetten von B. Klein, Gäbler, Reissiger ꝛc.

Die zu Michaelis v. J. aus der zweiten Gesangklasse in die erste Versetzten wurden während des Winterseme sters, die zu Ostern Versetzten während des Sommerhalbjahres in einer besondern wöchentlichen Stunde geübt. Musikdir. Rex.

Zweite Gesangklasse. Uebung in den Verhältnissen der Töne nach Stärke und Schwäche. Bildung der Molltonleiter. Zweistimmige Psalmen, Lieder und Choräle. 2 St. Dr. Hahn.

Dritte Gesangklasse. Bildung der Durtonleiter. Uebung im Treffen schwerer Intervallen, verbunden mit dem Einüben zweistimmiger Lieder und Choräle. 1 St. Dr. Hahn.

Vierte Gesangklasse. Lehre vom Tact und der Vorzeichnung. Tonleiter. Akkord-Uebungen. Einstimmige Lieder und Choräle. 1 St. Dr. Hahn.

Fünfte Gesangklasse. Allgemeine Begriffe, Notenkenntniß, Singen kleiner einstimmiger Liedersätze nach dem Gehör. 2 St. Dr. Hahn.

B. Chronik des Gymnasiums.

Die Ueberfüllung der Quarta machte im Anfang des Sommersemesters eine Theilung dieser Klasse nothwendig. Das Ordinariat der neuen Abtheilung übernahm der Lehrer Dr. Strack, an dessen Stelle der Lehrer Rückert die Quinta übernahm. Der Lehrer Gerber, welcher schon früher als Schulamtscandidat in der Anstalt gearbeitet und später der Realschule als Hülfslehrer angehört hatte, übernahm die Serta als Ordinarius und hat das ihm anvertraute Amt mit löblichem Eifer und günstigem Erfolg verwaltet.

Die Schulamtscandidaten Dr. Wehrmann, Dr. Rassow und Landsberg haben nach beendigtem Probejahre die Anstalt verlassen; der erstgenannte hat in Halberstadt, der zweite zuerst in Stettin, jetzt in Dresden an den dortigen Gymnasien einen angemessenen Wirkungskreis gefunden; alle haben sich um unsere Anstalt besondere Verdienste erworben und ein gesegnetes Andenken hinterlassen.

An ihrer Stelle traten Ostern d. J. die Candidaten Dr. Emsmann, Hermann, Hartrodt und Jänicke ein. Herr Dr. Dittrich hat seine Thätigkeit als Mitglied des hiesigen pädagogischen Seminars für gelehrtes Schulwesen mit gleicher Liebe, wie bisher, fortgesetzt.

C. Verordnungen der Behörden.

1. Vom 5. November 1844. Den Gymnasialschülern soll vor ihrem Abgange zur Universität eine angemessene Belehrung über zweckmäßige Einrichtung und Anordnung ihrer akademischen Studien gegeben werden.

2. Vom 4. December. Die Berichte, welche die Direktoren der Gymnasien und höheren Bürgerschulen über die Lehrgeschicklichkeit, praktische Brauchbarkeit und moralische Führung der Schulamts-Kandidaten zu erstatten haben, sollen auch von den Klassen-Ordinarien unterschrieben werden, unter deren Leitung dieselben zunächst gestanden haben.

3. Vom 20. Februar 1845. Die Nothwendigkeit einer sorgfältigen Beaufsichtigung der für die Schülerbibliothek in den Gymnasien anzuschaffenden Bücher betreffend.

4. Vom 26. April. Die Grundsätze, nach welchen den Lehrern an Gymnasien und höheren Bürgerschulen der Oberlehrertitel verliehen werden soll, betreffend. Sämmtliche Lehrer einer jeden Anstalt zerfallen in Oberlehrer, ordentliche Lehrer und außerordentliche Lehrer. Von 7 ordentlichen Lehrern sollen in der Regel 3 die Oberlehrerstellen bekleiden.

5. Vom 3. Mai. Die Grundsätze bei Einführung neuer Lehrbücher für den lateinischen und griechischen Sprachunterricht betreffend. Zu häufiger Wechsel wird widerrathen, Vereinfachung aber und möglichste Uebereinstimmung der Gymnasien empfohlen.

6. Vom 9. Juni. Den Jünglingen, welche die Universität noch nicht bezogen haben, kann eine mehrmalige Wiederholung der Maturitätsprüfung verstattet werden.

7. Vom 1. Juli. Der Vorstand des zoologischen Gartens gewährt den Schülern des Gymnasiums, der Real- und Elisabethschule, wenn sie von ihren Lehrern eingeführt werden, den Eintritt in denselben für den Preis von 1½ Sgr.

8. Vom 3. Juli. Zusendung eines Exemplars der unterm 4. Februar v. J. von des Königs Majestät Allerhöchst genehmigten Verordnung über die Ergänzung der Offiziere des stehenden Heeres im Frieden und die militairische Ausbildung der Offizier-Aspiranten, so wie über die Organisation des Cadetten-Corps. Zugleich wird gestattet, für diejenigen Gymnasialschüler, deren Eltern unter schriftlicher Erklärung, daß ihre Söhne für die militairische Laufbahn bestimmt seien, eine Dispensation vom Griechischen zu beantragen. Die so gewonnene Zeit können die Schüler dazu benutzen, in der Mathematik, Geschichte und Geographie durch ergänzenden Privatunterricht sich für die Militairprüfung vorzubereiten.

9. Vom 6. August. Diedrich's Hülfsbuch für den Religionsunterricht an den Gymnasien wird empfohlen.

10. Vom 30. August. Den Rechts-Candidaten soll in Zukunft, wenn nicht ganz besondere Gründe vorliegen, das akademische Triennium nie mehr von der Zeit an gerechnet werden, wo sie die Universität, ohne mit dem Zeugnisse der Reife versehen zu sein, besucht haben.

D. Statistische Nachrichten.

Die Zahl der in den vereinigten Anstalten während des Sommer-Semesters 1844 unterrichteten Zöglinge betrug nach der Angabe des vorjährigen Schulprogramms in 37 Klassen 1767, von denen sich 425 im Gymnasium, 564 in der Realschule, 475 in der Elisabethschule und 303 in der Vorschule befanden.

Im Sommer-Semester 1845 betrug die Gesammtzahl der Zöglinge in 38 Klassen 1906, von denen sich 440 im Gymnasium, 599 in der Realschule, 501 in der Elisabethschule und 366 in der Vorschule befanden. — Im Gymnasium waren: in Ober-Prima 23, in Unter-Prima 20, in Ober-Secunda 40, in Unter-Secunda 42, in Ober-Tertia 53, in Unter-Tertia 66, in Quarta Abtheil. I. 37, in Quarta Abtheil. II. 46, Quinta 72, in Sexta 41 Schüler. — In der Realschule waren: in Prima 25, in Ober-Secunda 39, in Unter-Secunda 57, in Ober-Tertia Abtheil. I. 57, in Ober-Tertia Abtheil. II. 57, in Unter-Tertia Abtheil. I. 57, in Unter-Tertia Abtheil. II. 55, in Ober-Quarta Abtheil. I. 59, in Ober-Quarta Abtheil. II. 60, in Unter-Quarta Abtheil. I. 68, in Unter-Quarta Abtheil. II. 67 Schüler. — In der Elisabethschule waren: in Prima 40, in Secunda 50, in Tertia 44, in Ober-Quarta 50, in Unter-Quarta 49, in Ober-Quinta 44, in Unter-Quinta 54, in Ober-Sexta 51, in Unter-Sexta 39, in Ober-Septima 42, in Unter-Septima

28 Schülerinnen. — In der Vorschule waren: in Ober-Quinta 64, in Unter-Quinta 64, in Ober-Sexta 69, in Unter-Sexta 66, in Ober-Septima 58, in Unter-Septima 43.

Vom Gymnasium gingen mit dem Zeugniß der Reife zur Universität ab:

Ostern d. J.

1. Gustav v. Dieſt aus Posen, evangelischer Confession, 18½ Jahr alt, 7 Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima, studirt Jura und Cameralia in Berlin. 2. Rudolph Schultze aus Berlin, evangelischer Confession, 16½ Jahr alt, 9½ Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima, studirt Theologie und Philologie in Berlin. 3. Eduard Lottner aus Berlin, evangelischer Confession, 18½ Jahr alt, 5 Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima, studirt Mathematik und Naturwissenschaften in Berlin. 4. Carl Graßhoff aus Rankersleben bei Magdeburg, evangelischer Confession, 21 Jahr alt, 1½ Jahr auf dem Gymnasium und in Prima, früher auf dem Domgymnasium in Magdeburg, studirt in Berlin Theologie. 5. Carl Gallwitz aus Berlin, evangelischer Confession, 18½ Jahr alt, 8½ Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima, studirt Theologie in Berlin. 6. Wilhelm Coulon aus Potsdam, evangelischer Confession, 2½ Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima, studirt Theologie in Berlin. 7. Theodor v. Becherer aus Mainz, evangelischer Confession, 21½ Jahr alt, 4 Jahr auf dem Gymnasium und 2 Jahr in Prima studirt Jura und Cameralia in Heidelberg.

Jetzt gehen mit demselben Zeugniß ab:

8. Friedrich Eduard Braun aus Berlin, evangelischer Confession, 18½ Jahr alt, 1½ Jahr in Prima des Gymnasiums, früher in Celle, studirt in Berlin Theologie. 9. Hetürich Wilhelm Dirksen aus Königsberg in Preußen, evangelischer Confession, 17½ Jahr alt, 9 Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima, studirt in Berlin Jura. 10. Eduard Mühlmann aus Jällichau, evangelischer Confession, 18 Jahr alt, 8 Jahr im Gymnasium, 2 Jahr in Prima, studirt zu Berlin und Heidelberg Jura. 11. Heinrich Gottlieb Emil Cracau aus Berlin, evangelischer Confession, 18½ Jahr alt, 9 Jahr im Gymnasium, 2 Jahr in Prima, studirt in Berlin Theologie. 12. Emil Rudolph Theodor Jahn aus Berlin, evangelischer Confession, 19 Jahr alt, 11 Jahr in der Realschule und dem Gymnasium, 2½ Jahr in Prima, studirt in Berlin Theologie. 13. Peter Joseph Sandt aus Berlin, katholischer Confession, 19 Jahr alt, 8 Jahr im Gymnasium, 2 Jahr in Prima, studirt in Berlin die Rechte. 14. Carl Alexander Paul Schmeling aus Berlin, evangelischer Confession, 19 Jahr alt, 9 Jahr im Gymnasium, 2 Jahr in Prima, studirt in Berlin Theologie. 15. Rudolph Ferdinand Klotzsch aus Storkow, evangelischer Confession, 19 Jahr alt, 6 Jahr im Gymnasium, 2 Jahr in Prima, studirt in Berlin Jura. 16. Victor Anton Wilhelm Rintelen aus Wesel am Rhein, katholischer Confession, 19 Jahr alt, 9 Jahr im Gymnasium, 2 Jahr in Prima, studirt in Berlin Jura. 17. Richard Heinrich Ranke aus Quedlinburg, evangelischer Confession, 18½ Jahr alt, 3½ Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima, studirt in Halle und Berlin Philologie. 18. Carl Wilhelm v. Colomb aus Berlin, evangelischer Confession, 20 Jahr alt, 3 Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima, studirt in Berlin Jura und Cameralia. 19. Julius Otto aus Goerzke bei Magdeburg, evangelischer Confession, 18 Jahr alt, 10 Jahr auf dem Gymnasium, 3 Jahr mit Unterbrechung in Prima, studirt in Berlin Jura und Cameralia.

E. Vermehrung des Lehrapparats.

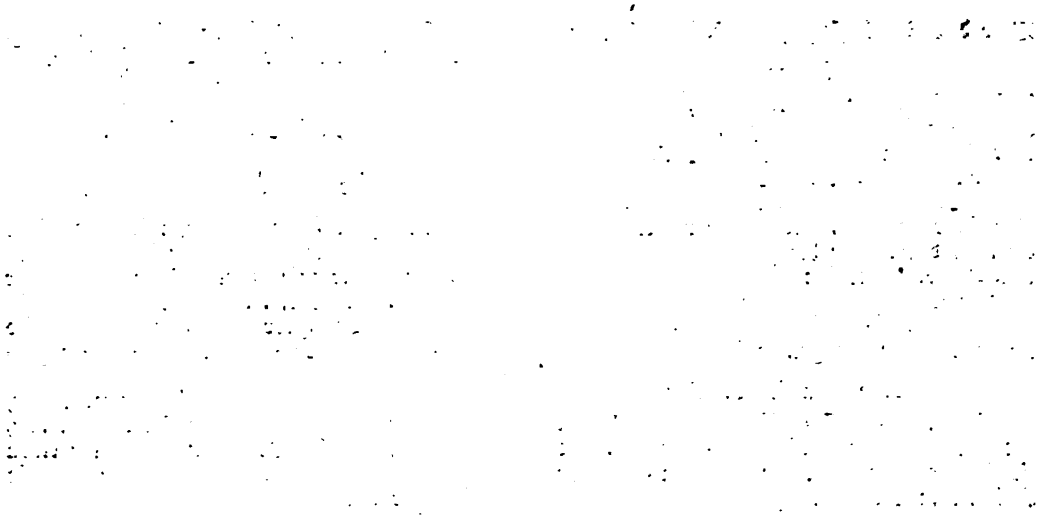
An Geschenken erhielt die Lehrerbibliothek von Einem Hohen Königl. Ministerio: Klöden, Geschichte des Markgrafen Waldemar von Brandenburg. 4 Thle. Berlin 1844, 1845. Riedel, Novus Codex diplomaticus Brandenburgensis 2. Haupttheils 2. Band. Berlin 1845. 4. Gerhard, Archäologische Zeitung. Jahrgang 1844.

Durch Ein Hochlöbliches Königl. Provinzial-Schulcollegium erhielt dieselbe: Körte, Leben und Studien Fr. A. Wolf's des Philologen. 2 Thle. Essen 1833. Diedrich, Hülfsbuch für den Religionsunterricht auf der obersten Lehrstufe der Gymnasien. Halle 1844. 8. Von den Herren Verfassern wurde überreicht: Encke, Berliner astronomisches Jahrbuch 1847. Böttticher, Gustav Adolph, König von Schweden. Kaiserswerth am Rhein 1845. 8. Von dem Herrn Buchhändler Vieweg: Madvig, lateinische Sprachlehre nebst Bemerkungen über verschiedene Punkte des Systems der lateinischen Sprachlehre. Braunschweig 1844. 8.

Außerdem wurden angeschafft: Meibomii, Scriptores antiquae musicae Amstelod. 1652. 4. van der Chys, Commentarius geographicus in Arrianum de expeditione Alexandri Lugd. Bat. 1828. 8. Joh. Gottl. Fichte. Sämmtliche Werke, herausgegeben von J. H. Fichte. Bd. 1, 2, 3, 6. Berlin 1845. 8. Eckermann, Lehrbuch der Religionsgeschichte und Mythologie der vorzüglichsten Völker des Alterthums nach Ottfr. Müllers Anordnung. 2 Bde. Halle 1845. 8. — Fortgesetzt wurden: Wilberg, Ptolemaei geographia libri octo Fasc. VI. Freund, Wörterbuch der lat. Sprache Bd. 3. Abtheil. I. 1845. 8. Stephani Thesaurus linguae graecae ed. Dindorf. Vol. VI. Fasc. 3—5. Ersch und Gruber Encyklopädie der Künste und Wissenschaften. Sekt. I. Bd. 40. Sekt. II. Bd. 23. Sekt. III. Bd. 19. Schlosser, Geschichte des 18. Jahrh. Bd. 5. 1845. 8. Berthold, Geschichte von Rügen und Pommern. Bd. 4. Abtheil. 2. Hamburg 1845. 8. Platner, Beschreibung der Stadt Rom. Bd. 3. Abtheil. 3. 1844. 8. C. Ritter, Erdkunde von Asien, Bd. 10. 11. (nebst Charte von Mahlmann) Berlin 1843, 1844. 8. Neander, Kirchengeschichte Bd. 10. Hamburg 1845. 8. Schleiermacher's Werke, Bd. 8. Abtheil. 1. Einleitung in das N. T. Berlin 1845. 8. und zur Philosophie die Lehre vom Staate Bd. 6. Ebendas. 1845. Hegel's Werke Bd. 7. Abtheil. II. Berlin 1845. H. Ritter, Geschichte der Philosophie Bd. 7. 8. Hamburg 1845. Graff, hochdeutscher Sprachschatz. Index I. Heyse, ausführliches Lehrbuch der deutschen Sprache. Bd. II. Hannover 1844. 8. Winckelmann's Werke, Abtheil. III. 1845. Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 29. 1845. Gmelin, Handbuch der Chemie, Lieferung 17—21. Heidelberg 1845. 8. Handwörterbuch der Chemie und Physik. Bd. 2. Abtheil. I. F—Ho. Berlin 1845. Oken, Abbildungen Supplem. 2. 3. Sprunner, Atlas. Heft 8. Poggendorf's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 65. 1845.

Der physikalische Apparat ist durch ein Gasometer und einige kleine chemische Geräthschaften vermehrt worden.

Auch erhielten wir zur Begründung einer naturhistorischen Sammlung an Geschenken: von Herren A. v. Prillwitz, Castor fiber, Mustela erminea, Cervus Elaphus juv., Fulica atra; von den Schülern der Anstalt Krulle, Ockel, Wittchow, Bechtold, v. Ledebur, Schulz, Hoffmann, Sakowsky, Betzien, Marheinecke, v. Zastrow I., Ribbentropp, Lenz und Habelmann: Geweihe von Cervus, Dama und Cervus capreolus, Fulica atra in 2 Exemplaren, Falco buteo in 2 Exemplaren, Falco tinnunculus, Corvus cornix, Psittacus erithacus, Oriolus galbula, Alcedo ispida, Sturnus vulgaris, Regulus cristatus, Regulus ignicapillus, Turdus musicus, Anas Penelope, Lacerta agilis, Coluber natrix, Salamandra nigra, verschiedene Seemuscheln, mehrere geschliffene Edelsteine und Alaun-Crystall.



F. Oeffentliche Prüfung.

Montag, den 29. September.

Vormittags von 8½ Uhr an.

Choral.

1. Obertertia. a) Cäsar. Oberl. Böhm. b) Geschichte. Prof. Walter.
2. Untersecunda. a) Homer. Oberl. Drogan. b) Mathematik. Dr. Lachterhandt.
3. Obersecunda. a) Livius. Prof. Bresemer. b) Französisch. Prof. Heydemann.
4. Unterprima. a) Deutsche Literatur. Prof. Arem. b) Homer. Prof. Bötticher.
5. Oberprima. a) Mathematik. Prof. Schellbach. b) Horatius. Der Director.

Choral und Motette von K. E. Grell.

Entlassung der Abiturienten durch den Director.

Psalm, componirt von Bernh. Klein.

Nachmittag.

1. Sexta. a) Rechnen. b) Deutsch. Lehrer Gerber.
2. Quinta. a) Latein. b) Geographie. Lehrer Rückert.
3. Quarta. Cot. I. Griechisch. Dr. Strack. Cot. II. Lateinisch. Dr. Geidler.
4. Untertertia. a) Griechisch. Oberl. Rehbein. b) Geographie. Prof. Walter.

Vor der öffentlichen Prüfung wird am 25. September Abends von 7 Uhr an von den Schülern der oberen Klassen des Gymnasiums die Electra des Sophocles in griechischer Sprache aufgeführt. Die Chöre sind vom Herrn Musikdirector Fr. Commer componirt. Die Rollen sind so vertheilt: Der Pädagog: Pirksen. Orestes: Braun. Electra: Gustmann. Chrysothemis: Heyse. Klytämnestra: Rintelen. Aegisthos: Schmeling, sämmtlich Primaner. Den Chor bilden: Jahn, Klotzsch, Mühlmann, Ranke, Encke, Ragusa, Benicke, Hennig, v. Arnim, Schulz, Freudemann, Kober, Plantier, Dieliz.

Zu den Schulfeierlichkeiten lade ich mit ehrfurchtsvoller Ergebenheit ein: Seine Excellenz den Königlichen Wirklichen Geheimen Staatsminister für die geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten, Herrn Eichhorn; den Königlichen Wirklichen Geheimen Ober-Regierungsrath, Director im Ministerium der geistlichen Angelegenheiten ꝛc., Herrn v. Ladenberg; die sämmtlichen Herren Räthe dieses hohen Ministeriums; den Königlichen Wirklichen Geheimen Ober-Regierungsrath, Ober-Präsidenten der Provinz Brandenburg ꝛc., Herrn von Meding; den Königlichen Geheimen Ober-Regierungsrath, Vice-Präsidenten ꝛc., Herrn Weil; alle Herren Räthe des Königlichen Consistoriums und Schulcollegiums der Provinz Brandenburg; die Eltern und Pfleger unserer Zöglinge, so wie Alle, welche den öffentlichen Bildungs-Anstalten ihre Theilnahme schenken.

Der Winter-Cursus beginnt: im Friedrich-Wilhelms-Gymnasium, Mittwoch den 15. October Vormittags 9 Uhr; in der Elisabethschule, Sonnabend den 11. October, Vormittags 11 Uhr; in der Realschule, Montag den 13. October, Vormittags 9 Uhr, in der Vorschule, Montag den 13. October, Vormittags 11 Uhr mit der Einführung der Neueintretenden durch den Director.

Zur Aufnahme neuer Zöglinge werden während der Ferien, mit Ausnahme der Sonntage, Vormittags von 8—12 Uhr bereit sein: für das Friedrich-Wilhelms-Gymnasium der Unterzeichnete, für die Realschule Herr Prof. Kalisch, Anhaltstraße Nr. 10., für die Elisabethschule Herr Prof. Müller in der Anstalt, für die Vorschule Herr Oberlehrer Ernst, Schützenstraße Nr. 73.

F. Ranke.

Gesänge.

Vor der Entlassung der Abiturienten.

Choral.

Unserm Gott laßt uns lobsingen,
Jehovah unser Opfer bringen,
Nur Ihm gebühret Ruhm und Ehr'.
Wie im Himmel, so auf Erden
Müss' Er von uns verherrlicht werden,
Der Herr ist Gott, und Keiner mehr.
Er ist's, deß ew'ger Rath
Uns All' erwählet hat
In dem Sohne.
Durch ihn allein will Er verzeihn,
Und allen Sündern gnädig sein.

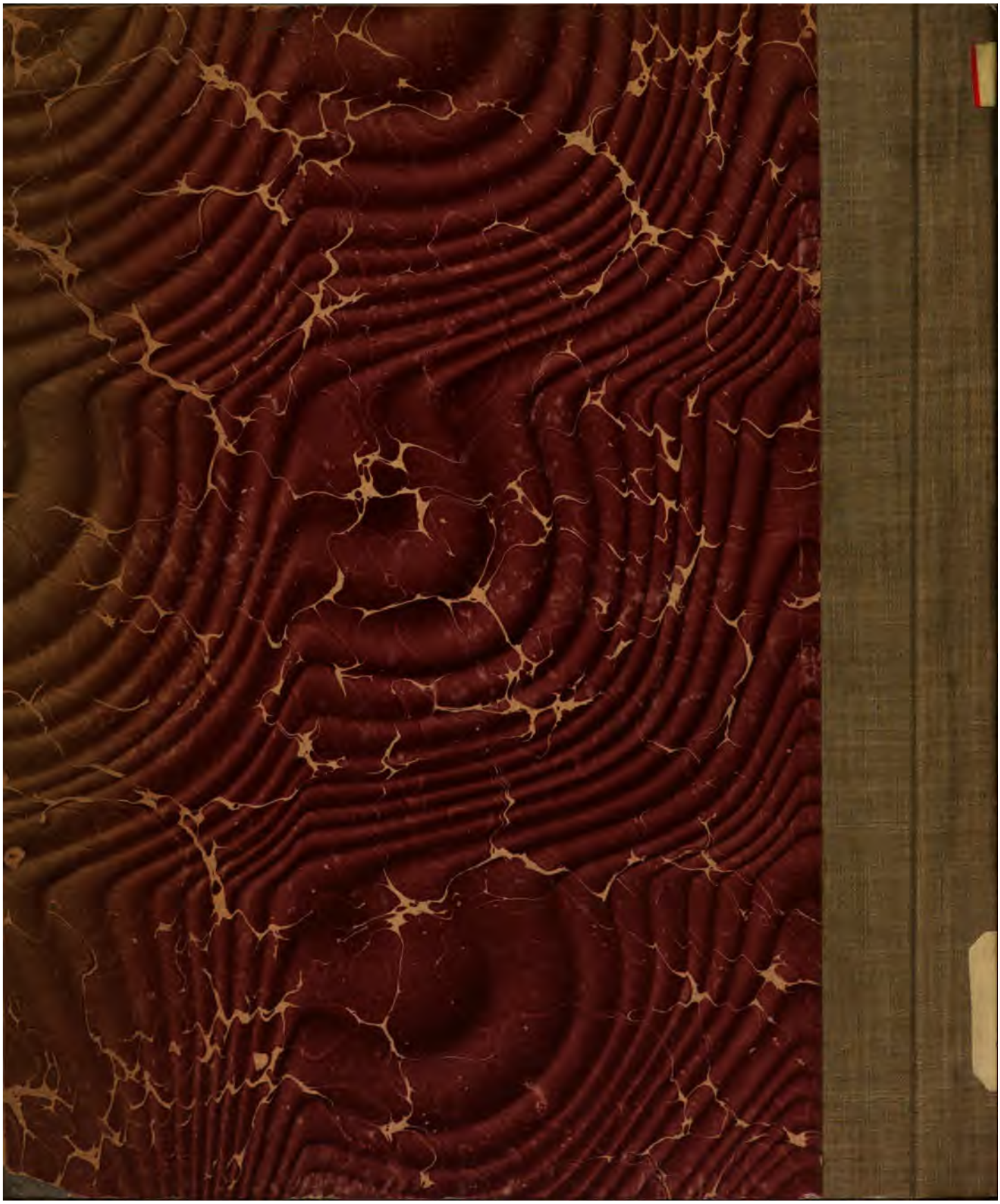
Motette von A. E. Grell.

Herr, Gott, Du bist unsre Zuflucht für und für. Ehe denn die Berge worden, und die Welt erschaffen worden, bist Du Gott von Ewigkeit zu Ewigkeit. Hallelujah!

Die Gnade des Herrn währt von Ewigkeit zu Ewigkeit über die, so ihn fürchten.

Nach der Entlassung.

Psalm, comp. von Bernh. Klein.

Der Herr ist mein Hirt, mir wird nichts mangeln. Er weidet mich auf einer grünen Au; Er führet mich zum frischen Wasser, er erquicket meine Seele, er führet mich auf rechtem Pfad. Der Herr ist mein Hirt, mir wird nichts mangeln; er weidet mich auf einer grünen Au.

Ob ich schon wanderte in finstrer Nacht, fürchte ich kein Unglück, denn Du bist bei mir, und tröstest mich, Du bereitest vor mir einen Tisch gegen meine Feinde. Der Herr ist mein Hirt, mir wird nichts mangeln.